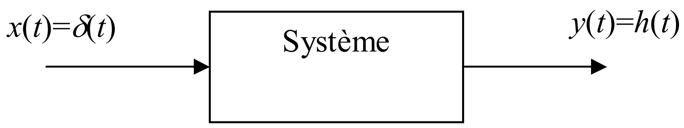
Chapitre 5: Convolution

1. Introduction

La convolution est une opération essentiellement utilisée pour déterminer la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps à un signal d'entrée. Cependant elle ne se limite pas seulement à cette tache, elle sert aussi à générer des signaux à partir d'autres signaux, à filtrer un signal et à évaluer la corrélation. Ce chapitre présente d'abords quelques définitions sur les systèmes puis introduit la notion de convolution, ses propriétés ainsi que ses méthodes de calcul.

2. Réponse impulsionnelle d'un système

Un système peut être représenté par un modèle mathématique reliant son entrée $x(t)$ à sa sortie $y(t)$. Ce modèle peut une être une fonction mathématique, une équation différentielle, une réponse impulsionnelle, une fonction de transfert, une représentation d'état, etc.
La réponse impulsionnelle d'un système est définie par la réponse du système lorsqu'on applique à son entrée un pic de Dirac.



Elle permet de caractériser complètement un système et peut être utilisée pour calculer la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps pour d'autres signaux d'entrée grâce à la convolution.

3. Systèmes linéaires et invariant dans le temps

3.1 Systèmes linéaires

Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les réponses respectives d'un système aux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Le système est dit linéaire s'il respecte le principe de superposition:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{Système} y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

Exemples Amplificateur (linéaire) $y(t) = Kx(t)$

Amplificateur quadratique (non linéaire) $y(t) = x^2(t)$

3.2 Systèmes invariants dans le temps

Un système est invariant dans le temps si un retard dans le signal d'entrée induit le même retard dans le signal de sortie.

$$x(t-t_0) \xrightarrow{Système} y(t-t_0)$$

Exemples $y(t)=x^2(t)$ (Invariant)

$y(t)=tx(t)$ (Variant)

3.3 Systèmes linéaires et invariants dans le temps

Un système peut être invariant dans le temps sans qu'il soit nécessairement linéaire et vice versa.

Un système est dit linéaire et invariant dans le temps (LTI) s'il est en même temps linéaire et invariant dans le temps.

4. Convolution

La convolution est une opération qui permet de déterminer la réponse d'un système LTI, de réponse impulsionnelle $h(t)$, à un signal d'entrée.

$$\delta(t) \xrightarrow{Système\ LTI} y(t)=h(t)$$

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{Système\ LTI} y(t)=h(t-t_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(t-t_k) \xrightarrow{Système\ LTI} y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h(t-t_k)$$

Si les coefficients a_k sont les valeurs du signal d'entrée $x(t)$ à des instants $t_k=\mathrm{k}\Delta t$, c'est à dire que $a_k=x(k\Delta t)$, on a alors:

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)$ représente le signal analogique $x(t)$ échantillonné (voir Fig.)

et $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)$

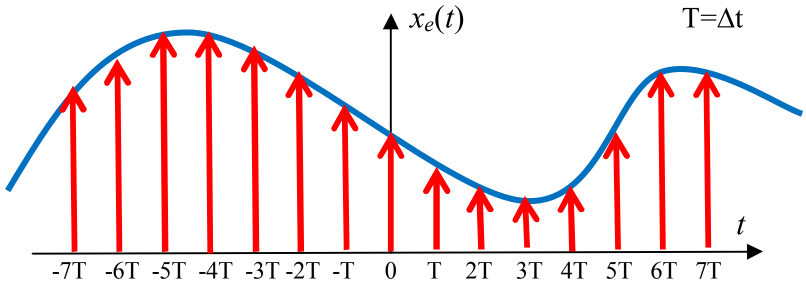
Lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$, $k\Delta t \longrightarrow \tau$ (retard) , $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t) \longrightarrow x(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}}$$

Cette relation est appelée "intégrale de convolution" ou "produit de convolution". On la représente symboliquement par (*):

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$



5. Propriétés et utilité de la convolution

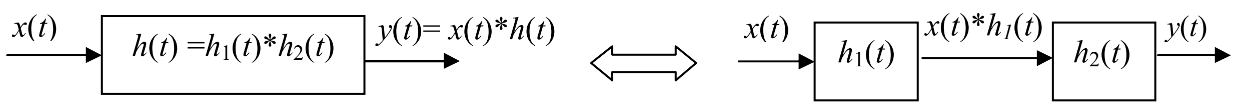
1 − Elément neutre (pic de Dirac) : $x(t) * \delta(t) = x(t)$

2 − Durée: Si la durée du signal $x(t)$ est T_1 et celle de $h(t)$ est T_2, alors la durée de $y(t) = x(t) * h(t)$ sera est égale à $T = T_1 + T_2$.

3 − Commutativité: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

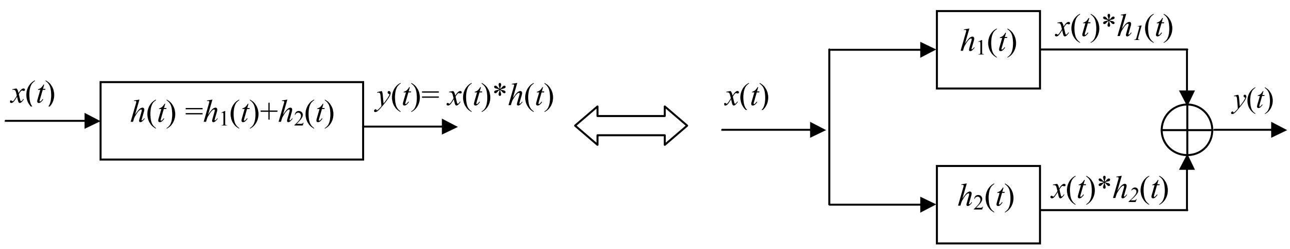
4 − Associativité: $x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$

Cette propriété montre que deux systèmes LTI placés en cascade est équivalent à un système LTI qui pour réponse impulsionnelle le produit de convolution des réponses impulsionnelles des deux systèmes.



5 − Distributivité: $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$

Cette propriété montre que deux systèmes LTI placés en parallèle est équivalent à un système LTI qui a pour réponse impulsionnelle la somme des réponses impulsionnelles des deux systèmes.



6 − Décalage: Si $y(t) = x(t) * h(t)$, alors:

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) * h(t) = x(t) * h(t - t_0)$$

$$y(t - t_0 - t_1) = x(t - t_0) * h(t - t_1) = x(t - t_1) * h(t - t_0)$$

7 − Dérivation: $\dfrac{d\big(x(t) * h(t)\big)}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \dfrac{dh(t)}{dt}$

Cette propriété permet d'établir le lien entre la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle:

Si $x(t) = u(t)$, alors $y_u(t) = u(t) * h(t)$ est la réponse indicielle.

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

La réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle.

8- Système causal: $h(t) = 0 \quad pour\ t < 0$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Si en plus $x(t)$ est causal:

$$y(t) = \int_0^{t} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^{t} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

6. Convolution des signaux périodiques

Soient $x(t)$ et $h(t)$ deux signaux périodiques de même période T_0. Leur produit de convolution, symbolisé par "$\otimes$", est périodique de période T_0. Il est défini par:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_0^{T_0} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

7- Autres applications

La convolution peut être appliquée sur deux signaux quelconques pas forcément entre un signal et une réponse impulsionnelle. On peut, par exemple, l'utiliser pour :

- Générer un signal triangulaire à partir d'un signal porte: $\Lambda(t) = \prod(t) * \prod(t)$
- Générer un signal périodique $x_p(t)$ à partir d'un signal $x(t)$ non périodique $x_p(t) = x(t) * \delta_T(t)$
- Calculer la corrélation entre deux signaux $\varphi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$.

8. Théorème de Plancherel

Ce théorème, très important, établit la relation entre le produit de convolution et la transformée de Fourier. Il s'annonce comme suit: "La transformée de Fourier d'un produit de convolution entre deux signaux est un produit simple entre les transformées des deux signaux, et réciproquement":

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(f)H(f)$$
$$x(t)h(t) \xrightarrow{TF} X(f) * H(f)$$

Démonstration:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(f) = TF\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,e^{-j2\pi ft}dt}_{TF\{h(t-\tau)\}}\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(f)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau = H(f)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$Y(f) = X(f)H(f)$ C.Q.F.D

Remarque: On peut procéder de la même manière pour démontrer la deuxième relation du théorème de Plancherel, en utilisant cependant la transformée de Fourier inverse.

Noter également que $Y(f) = X(f)H(f) \Rightarrow \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)||H(f)| \\ arg(Y(f)) = arg(X(f)) + arg(H(f)) \end{cases}$

9. Calcul de l'intégrale de convolution

9.1 Méthode graphique

Elle permet de donner une interprétation graphique à la convolution. Elle consiste à:

1)- Tracer le signal $x(\tau)$

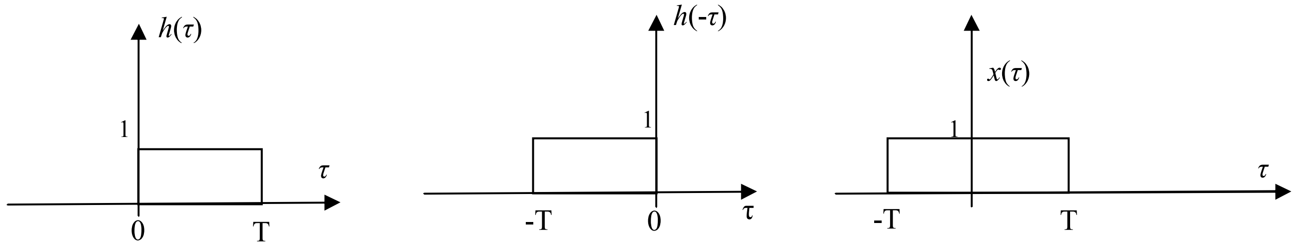
2)- Tracer le signal $h(\tau)$ puis celui de $h(-\tau)$

3)- Décaler $h(-\tau)$ de t de gauche à droite par étape. Pour chaque décalage, tracer $h(t-\tau)=h(-\tau+t)$.

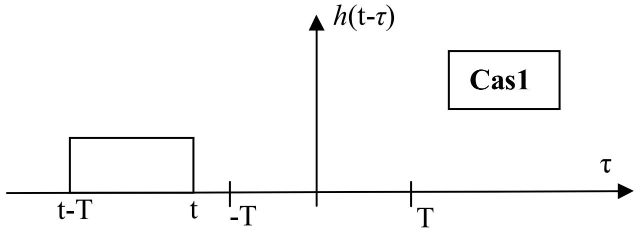
4)- Pour chaque cas, faire le produit $x(\tau).h(t-\tau)$ puis intégrer le résultat pour déterminer $y(t)$

Exemple illustratif: $x(t) = \prod_{2T}(t)$ et $h(t) = \prod_{T}(t - T/2)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



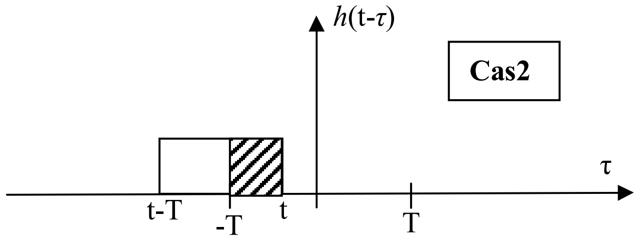
cas 1: $\boxed{t < -T}$, $\boxed{y(t)=0}$



Cas 2: t -T < -T et t >-T ⇒ $\boxed{-T < t < 0}$

$$y(t) = \int_{-T}^{t} d\tau = t + T$$

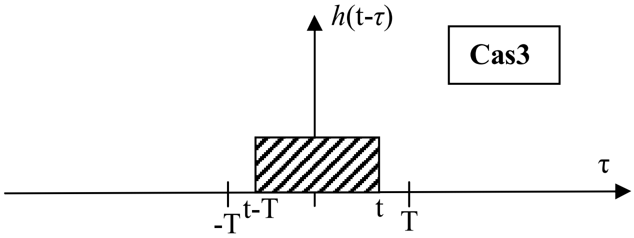
$$\boxed{y(t) = t + T}$$



Cas3: t-T >-T et t<T ⇒ $\boxed{0 < t < T}$

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} d\tau = T$$

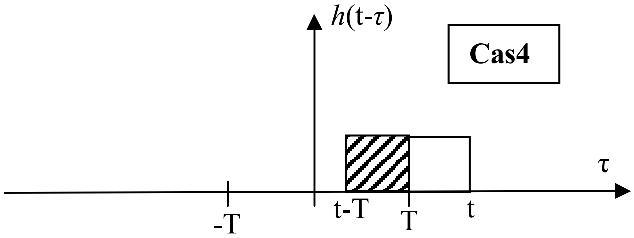
$$\boxed{y(t) = T}$$



Cas 4: t-T<T et t>T ⇒ $\boxed{T < t < 2T}$

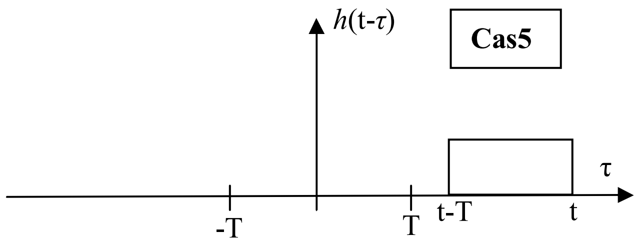
$$y(t) = \int_{t-T}^{T} d\tau = -t + 2T$$

$$\boxed{y(t) = -t + 2T}$$



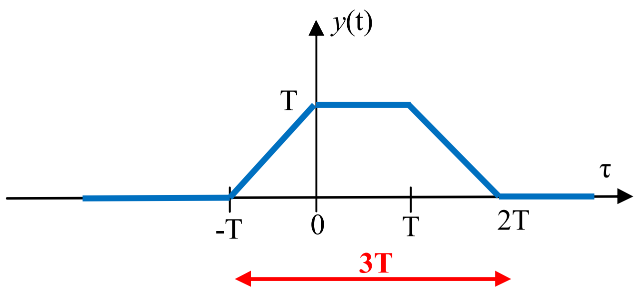
Cas 5: t-T>T ⇒ $\boxed{t > 2T}$

$$\boxed{y(t) = 0}$$



Finalement:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 0 & si\ \ t \leq -T \\ t + T & si\ \ -T \leq t \leq 0 \\ T & si\ \ 0 \leq t \leq T \\ -t + 2T & si\ \ T \leq t \leq 2T \\ 0 & si\ \ t \geq 2T \end{cases}}$$



9.2 Méthode analytique

Le calcul analytique du produit de convolution n'est pas toujours possible sauf dans certains cas, lorsque l'un des deux signaux possède au moins une borne ou donné en fonction de pics de Dirac.

Exemple: $x(t) = \prod_{2T}(t)$ et $h(t) = \prod_T(t - T/2)$

Ecrivons les deux signaux en fonction de $u(t)$:

$h(t) = \prod_T(t - T/2) = u(t) - u(t - T)$

$x(t) = \prod_{2T}(t) = u(t + T) - u(t - T)$

$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) - u(t - T)] = x(t) * u(t) - x(t) * u(t - T)$

Si $s(t) = x(t) * u(t)$, alors $y(t) = s(t) - s(t - T)$

Sachant que $x(t) = \prod_{2T}(t) = u(t + T) - u(t - T)$, on en déduit que:

$s(t) = x(t) * u(t) = [u(t + T) * u(t)] - [u(t - T) * u(t)]$

En posons $v(t) = u(t) * u(t)$, on peut écrire $s(t) = v(t + T) - v(t - T)$.

Ainsi, $y(t) = v(t + T) - v(t - T) - v(t) + v(t - 2T)$

Pour déterminer $y(t)$, il suffit de calculer $v(t)$:

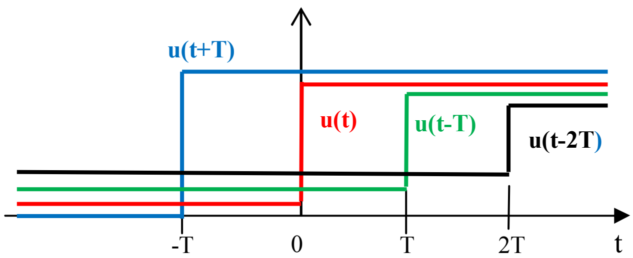
$$v(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} u(t - \tau)d\tau = \int_{0}^{t} d\tau$$

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^t d\tau = t & si\ t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = tu(t)$$

Par conséquent, $y(t) = v(t + T) - v(t - T) - v(t) + v(t - 2T)$

$$= (t + T)u(t + T) - (t - T)u(t - T) - (t)u(t) + (t - 2T)u(t - 2T)$$

Examinons tous les cas:



$Si \quad t < -T$, $\quad y(t) = 0$

$Si \quad -T < t < 0$, $\quad y(t) = (t + T)$

$Si \quad 0 < t < T$, $\quad y(t) = (t + T) - t = T$

$Si \quad T < t < 2T$, $\quad y(t) = (t + T) - t - (t - T) = -t + 2T$

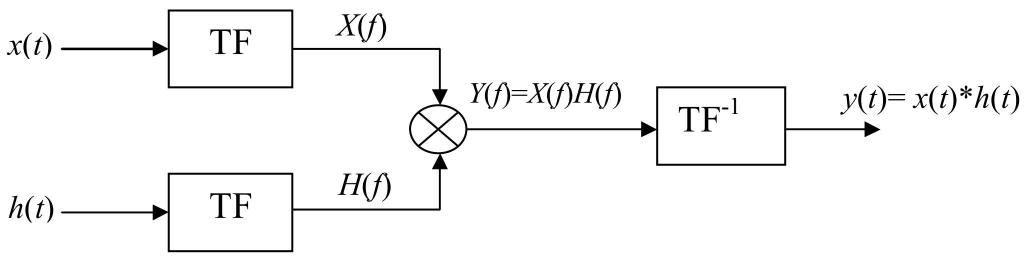
$Si \quad t > 2T$, $\quad y(t) = (t + T) - t - (t - T) + (t - 2T) = 0$

En résumé:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & si\ \ t \leq -T \\ t+T & si\ \ -T \leq t \leq 0 \\ T & si\ \ 0 \leq t \leq T \\ -t+2T & si\ \ T \leq t \leq 2T \\ 0 & si\ \ t \geq 2T \end{cases}$$

9.3 Méthode basée sur la transformée de Fourier

L'un des intérêts du théorème de Plancherel réside dans son application pour le calcul du produit de convolution comme le montre le schéma ci-dessous:



Cette méthode est souvent utilisée pour filtrer un signal.