Chapitre 4: Transformée de Fourier

1. Introduction

Un signal est habituellement représenté dans le domaine temporel comme une fonction dépendante de la variable "temps". Dans ce domaine, le signal peut être caractérisé par son amplitude, sa durée, son énergie, etc.

Une autre manière de décrire un signal $x(t)$ est de le représenter dans le domaine fréquentiel (spectral) comme une fonction, notée $X(f)$, dépendante de la variable "fréquence" f , dont la dimension est l'inverse de celle du temps. La représentation fréquentielle permet de caractériser un signal par sa bande spectrale et mettre en évidence les fréquences qu'il contient.

Ces deux domaines de description sont reliés par la transformée de Fourier, qui est considéré comme l'outil le plus fondamental de théorie et traitement du signal. C'est à juste titre que nous lui consacrons ce chapitre.

2. Définition de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$, également appelée Intégrale de Fourier, est une fonction, généralement complexe, de la variable fréquentielle (réelle) f définie par:

$$X(f) = TF\{x(t)\} = < x(t), e^{j2\pi ft} >$$

$$\boxed{\boldsymbol{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt}}$$

Quelque fois, la transformée de Fourier est définie en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La transformée de Fourier inverse est donnée par la formule suivante:

$$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = < X(f), e^{-j2\pi ft} >$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df}}$$

ou $x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

3. Condition de convergence de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une intégrale qui peut diverger. L'existence de la transformée de Fourier est subordonnée aux conditions de Dirichlet:

1) $-\ x(t)$ est absolument intégrable: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$

2)- $x(t)$ possède un nombre fini d'extremum dans tout intervalle fini.

3)- $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités dans un intervalle fini, et chacune de ces discontinuités est finie.

Généralement, la première condition suffit pour vérifier l'existence de la transformée de Fourier. Toutefois, les signaux qui ne respectent pas cette condition pourrons toujours avoir une transformée de Fourier comme nous le verrons par la suite.

4. Transformé de Fourier d'un signal réel

Soit un signal réel $x(t)$. Sa transformée de Fourier est une fonction complexe telle que:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(2\pi ft)dt}_{\mathcal{Re}\{X(f)\}} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -x(t)sin(2\pi ft)dt}_{Im\{X(f)\}}$$

$$X(f) = \mathcal{Re}\{X(f)\} + j\ Im\{X(f)\} = X_{Re}(f) + jX_{Im}(f)$$

Dans ce cas, on peut écrire:

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

avec:

$$|X(f)| = \sqrt{X_{Re}^2(f) + X_{Im}^2(f)}$$ ***Spectre d'amplitude***

$$\varphi(f) = arctg\left(\frac{X_{Im}(f)}{X_{Re}(f)}\right)$$ ***Spectre de phase***

Le spectre d'amplitude permet de voir le contenu fréquentiel d'un signal.

Le spectre de phase montre comment varie la phase du signal en fonction de la fréquence.

Notez bien que:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad et \quad X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt$$

On a ainsi $X(-f) = X^*(f)$

$|X(f)| = |X(-f)|$ $\Rightarrow$ **Le spectre d'amplitude est une fonction paire.**

$\varphi(f) = -\varphi(-f)$ $\Rightarrow$ **Le spectre de phase est une fonction impaire.**

D'autre part, selon que $x(t)$ est réel ou imaginaire, paire ou impaire, on a les cas indiqués dans le tableau ci-dessous:

$x(t)$	$X(f)$				
	Réelle	Imaginaire	Complexe	Paire	Impaire
Réel			**x**		
Réel paire	**x**			**x**	
Réel impaire		**x**			**x**
Imaginaire			**x**		
Imaginaire et paire		**x**		**x**	
Imaginaire et impaire	**x**				**x**

5. Bande spectrale

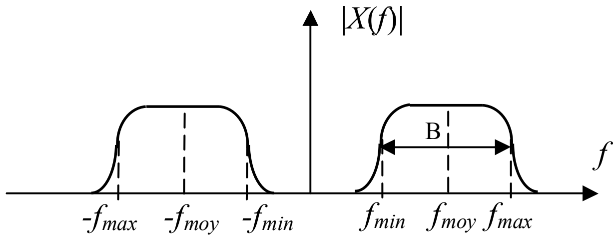
Le spectre d'amplitude permet de voir si la gamme des fréquences que contient un signal est grande ou petite et si ces fréquences sont basses ou hautes.

Le domaine des fréquences occupé par le spectre d'amplitude est ainsi appelé "Bande spectrale". La bande spectrale est définie par:

$$B = f_{max} - f_{min}$$

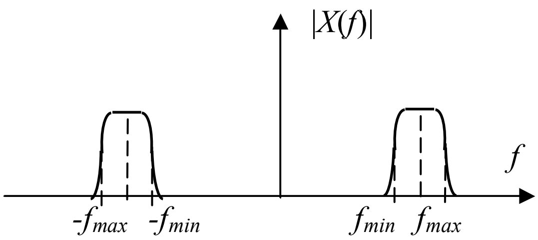
avec $0 \leq f_{min} < f_{max}$ où f_{max} et f_{min} sont respectivement les fréquences inférieure et supérieure qui délimitent la bande spectrale (voir Fig. ci-dessous).

On définit aussi la fréquence moyenne de la bande spectrale par $f_{moy} = (f_{max} + f_{min})/2$

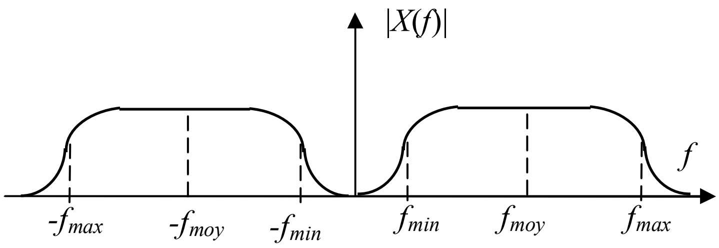


La bande spectrale est une caractéristique importante car, relativement à la fréquence moyenne f_{moy}, elle permet de distinguer:

- Les signaux à bande étroite (B/f_{moy}) est petit $(f_{max} \approx f_{min})$
- Les signaux à large bande (B/f_{moy}) est grand $(f_{max} \gg f_{min})$
- Les signaux à bande limitée ou spectre à support borné $|X(f)| = 0 \quad \forall\, |f| \notin B$



Bande étroite



Large bande

Concrètement, on classe les signaux à bande étroite en fonction de la fréquence moyenne f_{moy} :

– f_{moy} < 250 KHz : signaux basses fréquences (BF)

– 250 KHz < f_{moy} < 30 MHz : signaux hautes fréquences (HF)

– 30 MHz < f_{moy} < 300 MHz : signaux très hautes fréquences (VHF)

– 300 MHz < f_{moy} < 3 GHz : signaux ultra hautes fréquences (UHF)

– f_{moy} > 3 GHz : signaux super hautes fréquences (SHF)

f_{moy} > 250 KHz : Signaux hautes fréquences (HF)

Remarque

Lorsque la fréquence est supérieure à quelques térahertz (1 THz=10^{12}Hz), la longueur d'onde λ devient le paramètre de référence (λ = *c*/*f*) avec *c* : vitesse de la lumière 300000 Km/s) :

– 700 nm < λ < 0, 1 mm signal lumineux infrarouge

– 400 nm < λ < 700 nm signal lumineux visible

– 10 nm <λ < 400 nm signal lumineux ultraviolet.

6. Propriétés de la Transformée de Fourier

La transformée de Fourier possède des propriétés remarquables qui permettent de faciliter grandement la détermination ou le calcul de la transformée de Fourier de plusieurs signaux et notamment ceux pour qui l'intégrale de Fourier diverge ou qui ne respectent pas les conditions de convergence.

6. 1 Principales propriétés

Toutes les propriétés de la TF sont récapitulées dans la table donnée à la fin de ce chapitre. A des fins utiles, nous présentons ci-dessous quelques unes d'elles.

Linéarité: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{TF} a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$

Conjugué: $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$

Translation: $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

Déphasage: $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$

Dualité: $X(t) \xrightarrow{TF} x(-f)$

Similitude: $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

Dérivation: $\frac{d^n x(t)}{dt} \xrightarrow{TF} (j2\pi f)^n X(f)$

Toutes les propriétés peuvent être démontrées. Certaines d'entre elles seront traitées en TD.

6.2 Théorème de Parseval

Ce théorème stipule que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de son mode de représentation (temporelle ou fréquentielle). Autrement dit, l'énergie totale peut être mesurée de la même manière selon qu'on considère la représentation temporelle ou fréquentielle.

$$\boxed{W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}$$

Preuve:

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \quad \text{et} \quad x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}df$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft}df\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}_{X(f)}\right]df$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

7. Transformée de Fourier d'un signal à énergie finie

Les signaux à énergie finie satisfont la condition suivante:

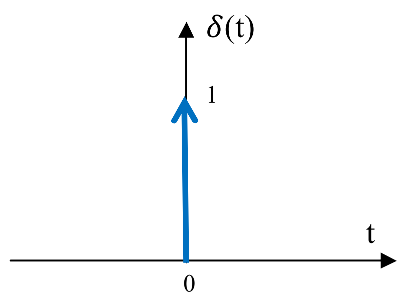
$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Tout signal à énergie finie possède une transformée de Fourier car il est absolument intégrable. En effet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Exemple 1:

Distribution de Dirac $x(t) = \delta(t)$



Elle absolument intégrable puisque $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\right)$. Sa TF est:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$$

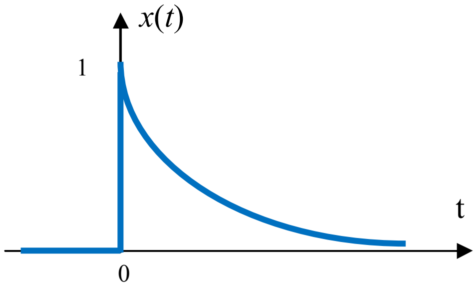
La distribution de Dirac contient toutes les fréquences avec la même amplitude.

Exemple 2:

$x(t) = e^{-at}u(t)$ est un signal à énergie finie (voit TD n°1). Sa TF est:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt = -\left.\frac{e^{-(a+j2\pi f)t}}{a+j2\pi f}\right|_{0}^{\infty}$$

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

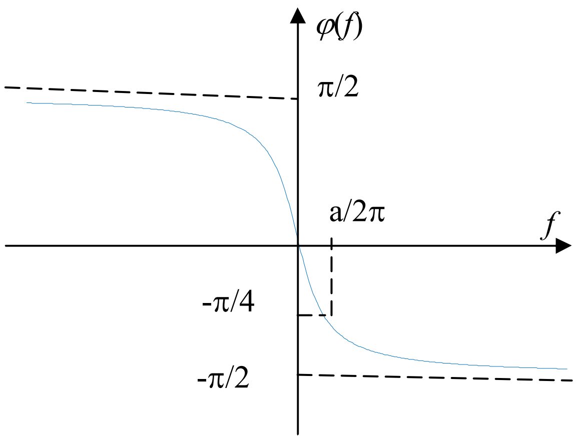


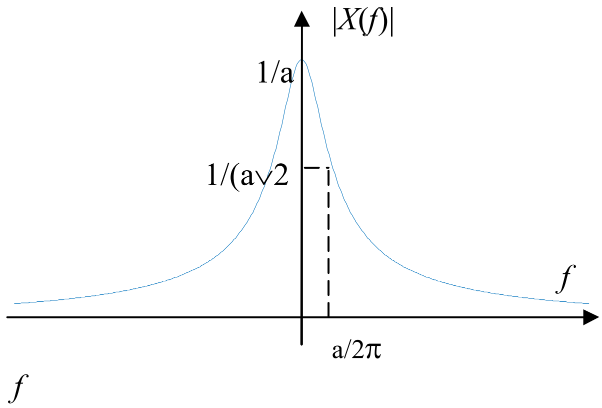
Le spectre d'amplitude est:

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

Le spectre de phase est:

$$\varphi(f) = -arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

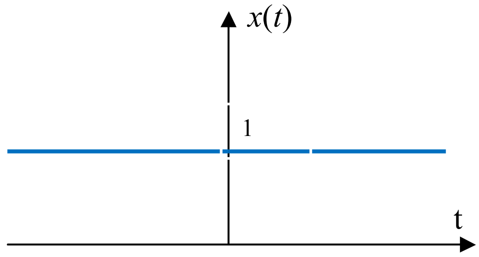




8. Transformée de Fourier d'un signal à puissance moyenne finie

Les signaux à puissance moyenne finie possèdent une énergie infinie $\left(W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \pm\infty\right)$. Ils ne satisfont pas les critères de convergence de la transformée de Fourier car ils ne sont pas absolument intégrables. On ne peut donc pas calculer leurs transformées de Fourier directement à partir de l'intégrale de Fourier. Pourtant ces signaux, à l'instar des signaux "constant", "signe", "échelon unitaire", "signaux périodique", sont très utiles. Pour déterminer leurs transformées de Fourier, on fait appel le plus souvent à la théorie des distributions ainsi qu'aux propriétés de la TF, et quelques fois à des astuces mathématiques.

8.1 Transformée de Fourier d'un signal "constant"



Le signal constant est défini par:

$x(t) = 1 \quad \forall -\infty < t < \infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty \quad \Longrightarrow$ non absolument intégrable

Le calcul de l'intégrale de Fourier diverge puisque:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}dt = \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\right|_{-\infty}^{\infty} = +\infty$$

Pour déterminer sa transformée de Fourier, on va se servir de la propriété de dualité:

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{TF} X(f) = 1$$
$$X(t) = 1 \xrightarrow{TF} x(-f) = \delta(-f)$$

Comme $\delta(-f) = \delta(f)$, alors $\boxed{TF\{1\} = \delta(f)}$

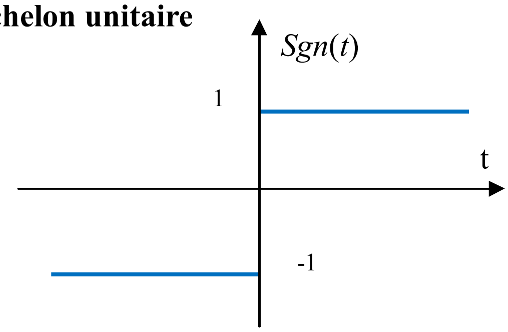
Remarques

- $TF\{c\} = c\delta(f)$ c: constante
- En appliquant la propriété de déphase à $x(t) = 1$, on obtient:

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(f - f_0)$$
$$e^{-j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(f + f_0)$$

8.2 Transformée de Fourier des signaux Signe et échelon unitaire

Signal "Signe"



Le signal "Signe" est défini par:

$$Sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$$

Il est claire qu'il n'est pas absolument intégrable. On peut aussi vérifier que son intégrale de Fourier diverge:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Sgn(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-j2\pi ft}dt = \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\right|_{0}^{\infty}$$

$X(f) = -\infty$

Pour calculer la TF de $Sgn(t)$, l'idée est de multiplier $Sgn(t)$ par une fonction convergente appropriée $e^{-a|t|}$. En effet, on peut écrire:

$$Sgn(t) = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|} Sgn(t)$$

Dans ce cas, la TF de $Sgn(t)$ est:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a\to 0} e^{-a|t|} Sgn(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} Sgn(t) e^{-a|t|} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = \lim_{a\to 0} \left[\int_{-\infty}^{0} -e^{at-j2\pi f t} \; dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at-j2\pi f t} \; dt \right] = \lim_{a\to 0} \left[- \frac{e^{(a-j2\pi f)t}}{a-j2\pi f} \bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(a+j2\pi f)t}}{a+j2\pi f} \bigg|_{0}^{\infty} \right]$$

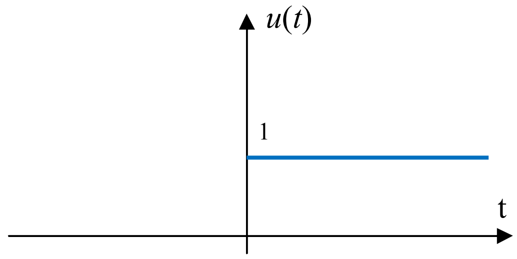
$$X(f) = \lim_{a\to 0} \left[-\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} \right] = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\boxed{TF\{Sgn(t)\} = \frac{1}{j\pi f}}$$

Signal "Echelon unitaire"

On peut facilement vérifier que le signal échelon unitaire $u(t)$ n'est pas absolument intégrable. Pour déterminer sa transformée de Fourier, on peut utiliser la relation entre $u(t)$ et $Sgn(t)$ suivante:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Sgn(t)$$



En appliquant la propriété de linéarité et compte tenu de la TF du signal constant $x(t) = 1$ et celle de $Sgn(t)$, la TF de $u(t)$ vaut:

$$\boxed{U(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}}$$

8.3 Transformée de Fourier d'un signal périodique

La transformée de Fourier d'un signal périodique de période T_0 peut être calculée en substituant le signal $x(t)$ par son développement en série de Fourier complexe.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \text{avec} \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

La TF de $x(t)$ conduit à:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} \right) e^{-j2\pi ft}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kf_0 t} e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \quad TF\{e^{j2\pi kf_0 t}\}$$

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, \delta(f - kf_0)}$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique est une suite de pic de Dirac pondérée par les coefficients complexes de la série de Fourier localisés aux fréquences multiples de f_0 .

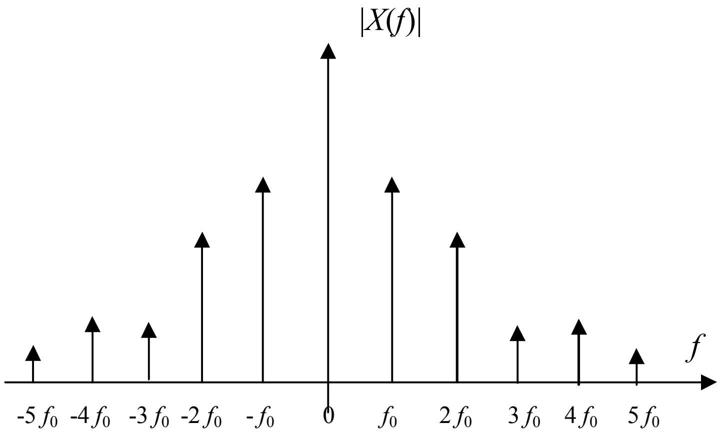
Le spectre d'amplitude est:

$$|X(f)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|\, \delta(f - kf_0)$$

Le spectre de phase est:

$$\varphi(f) = arctg\left(X_k|_{f=kf_0}\right)$$

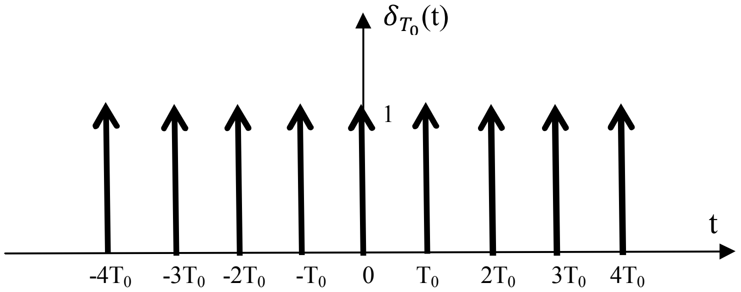
Le spectre d'amplitude d'un signal périodique est discret, il est constitué de pics de Dirac. Il communément appelé "Spectre de raies".



Exemple 1: Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est un pic de Dirac qui se répète d'une manière identique avec une période multiple de T_0 tel que:

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

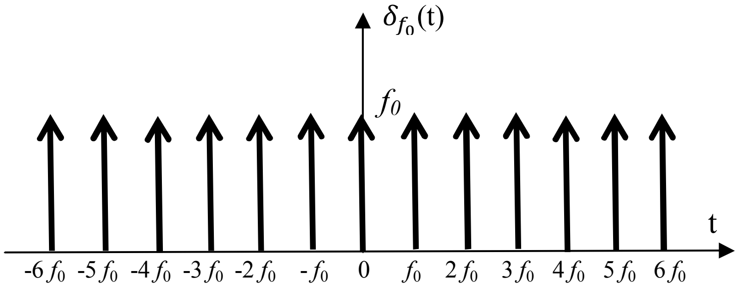


Sa transformée de Fourier est égale à:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, \delta(f - kf_0) \quad \text{où} \quad X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} = f_0$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0\, \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0) = f_0 \delta_{f_0}(f)$$

$$\boxed{TF\{\delta_{T_0}(t)\} = f_0 \delta_{f_0}(f)}$$



La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac.

Exemple 2: Sinus et Cosinus

Pour déterminer la transformée de Fourier des signaux périodiques $\mathrm{A}\sin(2\pi f_0 t)$ et $\mathrm{A}\cos(2\pi f_0 t)$, on peut utiliser les relations suivantes au lieu de passer par le développement en série de Fourier.

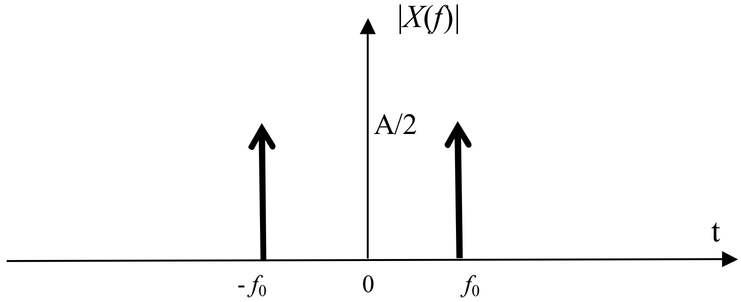
$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \quad \text{et} \quad \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

Sachant que $TF\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$ et $TF\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f + f_0)$, on en déduit que:

$$\boxed{TF\{\mathrm{A}\sin(2\pi f_0 t)\} = -j\frac{A}{2}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]} \Longrightarrow X_{-1} = X_1 = -j\frac{A}{2} \quad et \quad |X_{-1}| = |X_{-1}| = \frac{A}{2}$$

$$\boxed{TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]} \Longrightarrow X_{-1} = X_1 = \frac{A}{2} \quad et \quad |X_{-1}| = |X_{-1}| = \frac{A}{2}$$

Les spectres de raies des signaux périodiques $\mathrm{A}\sin(2\pi f_0 t)$ et $\mathrm{A}\cos(2\pi f_0 t)$ sont identiques, ils sont composés de deux pics.



Propriétés de la Transformée de Fourier

Propriétés	Signal	Transformée de Fourier
Définition	$x(t)=TFI\{X(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$	$X(f)=TF\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
Linéarité	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+...+a_Nx_N(t)$	$a_1X_1(f)+a_2X_2(f)+...+a_NX_N(f)$
Symétrie (Dualité)	$X(t)$	$x(-f)$
Conjugué	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Similitude	$x(at) \quad a\neq 0$	$Y(f)=\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Translation	$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}X(f)$
Déphasage	$e^{-j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f+f_0)$
Différentiation temporelle	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Différentiation fréquentielle	$(-j2\pi t)^n x(t)$	$\frac{d^n X(f)}{df^n}$
Convolution temporelle	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
Convolution fréquentielle	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{2}X(0)\delta(f)+\frac{X(f)}{j2\pi f}$
Aire au dessous de $x(t)$	$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$	
Aire au dessous de $X(f)$	$x(0)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)df$	
Théorème de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$	
Relation avec la TL	$X(f)=X(p)\big\rvert_{p=j2\pi f} \quad (x(t)$ causal)	

Signal	Transformée de Fourier		Signal	Transformée de Fourier
$\delta(t)$	1		$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
1	$\delta(f)$		$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$Sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$		$\delta_{T_0}(t)$	$f_0\delta_{f_0}(f)$
$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{j2\pi f}$		$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$\Pi_T(t)$	$T\sin c(Tf)$		$\Lambda_T(t)$	$T\sin c^2(Tf)$