Chapitre 3: Développement en série de Fourier des signaux périodiques

1. Introduction

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822 et sont devenus un outil fondamental dans l'étude des signaux périodiques. Elles permettent de décomposer un signal périodique en une somme de fonctions exponentielles complexes ou sinusoïdales dans le but de favoriser la mise en évidence de certaines propriétés du signal et faciliter son analyse ou l'étude des transformations qu'il va subir. Cette autre manière de représenter un signal périodique permet également de le considérer, d'une manière abstraite, comme un vecteur dans un espace appelé "Espace des signaux". La représentation vectorielle peut être généralisée à des signaux non périodiques. Nous nous intéresserons dans ce chapitre qu'au développement en série de Fourier des signaux périodiques.

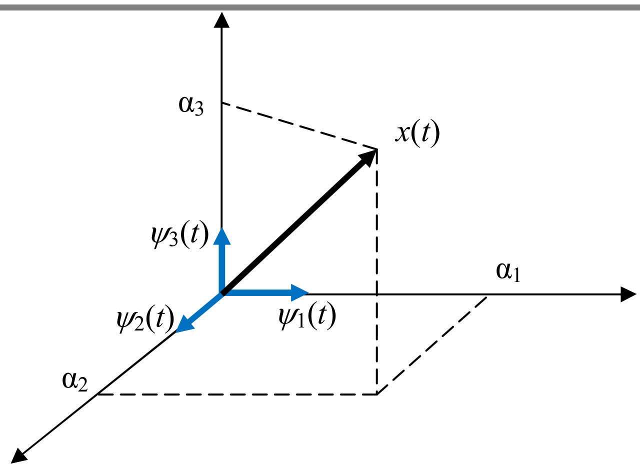
2. Principe

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T_0 $\left(f_0 = \frac{1}{T_0}\right)$. Le développement en série de Fourier de $x(t)$ est basé sur la représentation de $x(t)$ par une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $\psi_k(t) = e^{j2\pi k f_0 t}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

où α_k représentent les coefficients de la série.

Si l'ensemble des fonctions $\{\psi_k(t)\}$ sont linéairement indépendantes, elles forment alors une base de l'espace appelé "Espace des signaux". Dans ce cas, le signal $x(t)$ peut être assimilé, d'une manière abstraite, à un vecteur de cet espace. Les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ correspondent alors aux coordonnées du vecteur $x(t)$, c'est à dire aux projections du vecteur $x(t)$ sur les axes définis par les fonctions $\psi_k(t)$ (voir Fig. ci-dessous). L'espace des signaux est un espace vectoriel ou fonctionnel, il est de dimension infini.



3. Propriétés vectorielles: Définitions

Etant donné que les signaux peuvent être décrits par des vecteurs, on peut alors étendre toutes les propriétés vectorielles aux signaux.

3.1. Norme d'un signal

La norme est une généralisation de la notion de longueur. Pour un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de dimension *n*, la norme 2 ou euclidienne est:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Par analogie, on définit la norme euclidienne d'un signal $x(t)$, défini sur un intervalle de temps *T* par:

$$\|x(t)\|_2 = \left(\int_T |x(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$$

Le carré de la norme correspond à l'énergie du signal $x(t)$ puisque $\|x(t)\|_2^2 = W_x(T)$.

3.1. Distance entre deux signaux

La distance euclidienne entre deux vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, est:

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

Par analogie, la distance euclidienne entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, définis sur un interval de temps *T* , est donnée par:

$$d_p(x(t), y(t)) = \left(K \int_T |x(t) - y(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$$

K est une constante égale à 1 ou à 1/T.

La notion de distance est très utilisée en traitement du signal pour comparer deux signaux ou mesurer leur dissemblance, identifier un signal (reconnaissance des formes) ou filtrer un signal.

3.3. Produit scalaire de signaux

Le produit scalaire de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, définis sur un intervalle de temps T est:

$$< x(t), y(t) > = \int_T x(t)y^*(t)dt$$

En particulier:

$$< x(t), x(t) > = \int_T x(t)x^*(t)dt = \int_T |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|_2^2$$

3.1. Signaux orthogonaux

Deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions orthogonales sur un intervalle de temps T si leur produit scalaire est nul :

$$< x(t), y(t) > = \int_T x(t)y^*(t)dt = 0$$

4. Forme complexe du développement en série de Fourier

Le développement en série de Fourier décrite précédemment est dite de forme complexe car elle décrit le signal par une combinaison linéaire de fonctions complexes $\psi_k(t) = e^{j2\pi k f_0 t}$:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

Les fonctions $\psi_k(t) = e^{j2\pi k f_0 t}$ constituent des fonction sinusoïdales, elles ont l'avantage de rester sinusoïdales après avoir subies des opérations mathématiques (intégration, dérivation) et surtout d'être orthogonales. En effet:

$$< \psi_k(t), \psi_l(t) > = \int_{T_0} \psi_k(t)\psi_l^*(t)dt = \begin{cases} \int_{T_0} |\psi_k(t)|^2 dt & si\ k = l \\ 0 & si\ k \neq l \end{cases}$$

or $\int_{T_0} |\psi_k(t)|^2 dt = \|\psi_k(t)\|_2^2 = \left\|e^{j2\pi k f_0 t}\right\|_2^2 = \int_0^{T_0} dt = T_0$

$$< \psi_k(t), \psi_l(t) > \; = \begin{cases} T_0 \; si \; k = l \\ 0 \;\; si \; k \neq l \end{cases}$$

Les coefficients complexes $X_k = \alpha_k$ de la série sont définis par:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{< x(t), \psi_k(t) >}{< \psi_k(t), \psi_k(t) >}$$

$\int_{T_0}$ dénote une intégration sur une période, entre 0 et T_0 ou entre $-T_0/2$ et $T_0/2$.

$$\boxed{\mathbf{X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}}$$

Démonstration

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Multiplions les deux termes de cette relation par $e^{-j2\pi l f_0 t}$ puis intégrons:

$$x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t}$$

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} \, dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_l \int_{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} \, dt$$

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k < \psi_k(t), \psi_l(t) >$$

or $< \psi_k(t), \psi_l(t) > \; = \begin{cases} T_0 \; si \; k = l \\ 0 \;\; si \; k \neq l \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} \, dt = X_k T_0$$

$$\Rightarrow \quad X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \qquad C.Q.F.D.$$

Remarque

On peut généraliser la représentation vectorielle à des signaux non périodiques, définis sur un intervalle de temps T, sur des espaces de signaux de dimension finie ou infinie engendrés par d'autres fonctions orthogonales $\{\psi_k(t)\}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \quad \text{ou} \quad x(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t)$$

avec $\alpha_k = \dfrac{< x(t), \psi_k(t) >}{< \psi_k(t), \psi_k(t) >} = \dfrac{1}{\int_T |\psi_k(t)|^2 dt} \displaystyle\int_T x(t)\, \psi_k^*(t) dt$

Il existe un grand nombre de fonctions orthogonales, parmi lesquelles on peut citer les fonctions de Walch, les fonctions de Rademacher, les polynômes de Légendre, de Laguerre, de Tchebychev, de Hermite, etc.

5. Forme trigonométrique du développement en série de Fourier:

Le développement en série de Fourier sous forme trigonométrique consiste à représenter le signal par une somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence fondamentale f_0.

A partir de la formule d'Euler $e^{j2\pi k f_0 t} = cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)$, on peut écrire:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \left(cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{1} X_k \left(cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)\right) + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \left(cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)\right)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} \left(cos(-2\pi k f_0 t) + jsin(-2\pi k f_0 t)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \left(cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)\right)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} \left(cos(2\pi k f_0 t) - jsin(2\pi k f_0 t)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \left(cos(2\pi k f_0 t) + jsin(2\pi k f_0 t)\right)$$

$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k + X_{-k}) cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} j\,(X_k - X_{-k}) sin(2\pi k f_0 t)$

En posant:

$a_0 = X_0$

$\boxed{\boldsymbol{a_k = X_k + X_{-k}}}$

$\boxed{\boldsymbol{b_k = j(X_k - X_{-k})}}$

on obtient la forme trigonométrique de la série de Fourier:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin(2\pi k f_0 t)$$

ou encore

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + b_k sin(2\pi k f_0 t)}}$$

<u>Calcul de a_0</u>:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

Pour k=0, on a $a_0 = X_0$:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt}$$

a_0 représente la composante continue du signal $x(t)$ sur une période T_0.

<u>Calcul de a_k</u>:

$a_k = X_k + X_{-k}$

$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$ et $X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\left(e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t}\right)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, 2cos(2\pi f_0 t)dt$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, cos(2\pi f_0 t)dt}$$

<u>Calcul de b_k</u>:

$b_k = j(X_k - X_{-k})$

$$b_k = \frac{j}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\left(e^{j2\pi k f_0 t} - e^{-j2\pi k f_0 t}\right)dt = \frac{j}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,(-2jsin(2\pi f_0 t))dt$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, sin(2\pi f_0 t)dt}$$

Remarques

1)- $X_k = \frac{a_k + jb_k}{2}$ et $X_{-k} = \frac{a_k - jb_k}{2}$

2)- $X_k = X^*_{-k}$

3)- Si $x(t)$ est paire alors $b_k = 0$ et $X_k = X_{-k}$ sont réels

4)- Si $x(t)$ est impaire alors $a_k = 0$ et $X_k = -X_{-k}$ sont imaginaires

5)- Si $x(t)$ est réel alors: $a_k = 2\mathcal{R}e\{X_k\}$ et $b_k = -2Im\{X_k\}$

6)- Quelques fois, la série de Fourier trigonométrique est donnée par:

$$x(t) = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + b_k sin(2\pi k f_0 t) \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{\boldsymbol{2}}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt$$

7)- Identité de Parseval: La puissance moyenne totale d'un signal périodique est:

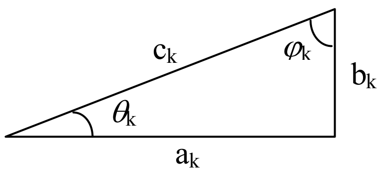
$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}k\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

6. Forme harmonique de la série de Fourier trigonométrique

Il est parfois avantageux de regrouper les termes de *cos* et *sin* en un seul terme.

Posons

$$\boxed{\boldsymbol{c_k = \sqrt{a_k + b_k}}}$$



$$cos(\theta_k) = \frac{a_k}{c_k}$$

$$sin(\theta_k) = \frac{b_k}{c_k}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)}}$$

On peut alors écrire:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + b_k sin(2\pi k f_0 t)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(\frac{a_k}{c_k}cos(2\pi k f_0 t) + \frac{b_k}{c_k}sin(2\pi k f_0 t)\right)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(cos(\theta_k)cos(2\pi k f_0 t) + sin(\theta_k)sin(2\pi k f_0 t))$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k cos(2\pi k f_0 t - \theta_k)}}$$

C'est la forme alternative ou harmonique de la série de Fourier trigonométrique.

$c_k cos(2\pi k f_0 t - \theta_k)$ représente la kème composante harmonique de $x(t)$. Les coefficients c_k et θ_k sont respectivement appelés amplitudes et phases harmoniques.

Remarque

La forme harmonique de la série de Fourier trigonométrique peut être également s'écrire:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k sin(2\pi k f_0 t - \varphi_k) \quad \text{avec} \quad \varphi_k = arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$