Chapitre 2: Signaux usuels

1. Introduction

En théorie du signal, on utilise fréquemment un certains nombre de signaux déterministes afin, d'une part, illustrer et vérifier les différentes théories du signal, et de simplifier ou d'alléger les formules mathématiques, fonctions ou opérateurs rencontrés en théorie du signal, d'autre part. Ce chapitre présente une description mathématique de ces signaux, certains sont bien connus, d'autres sont moins conventionnels.

2. Décalage des signaux

Avant de présenter les différents signaux, il est utile de rappeler la notion de décalage ou translation (avance ou retard) d'un signal.

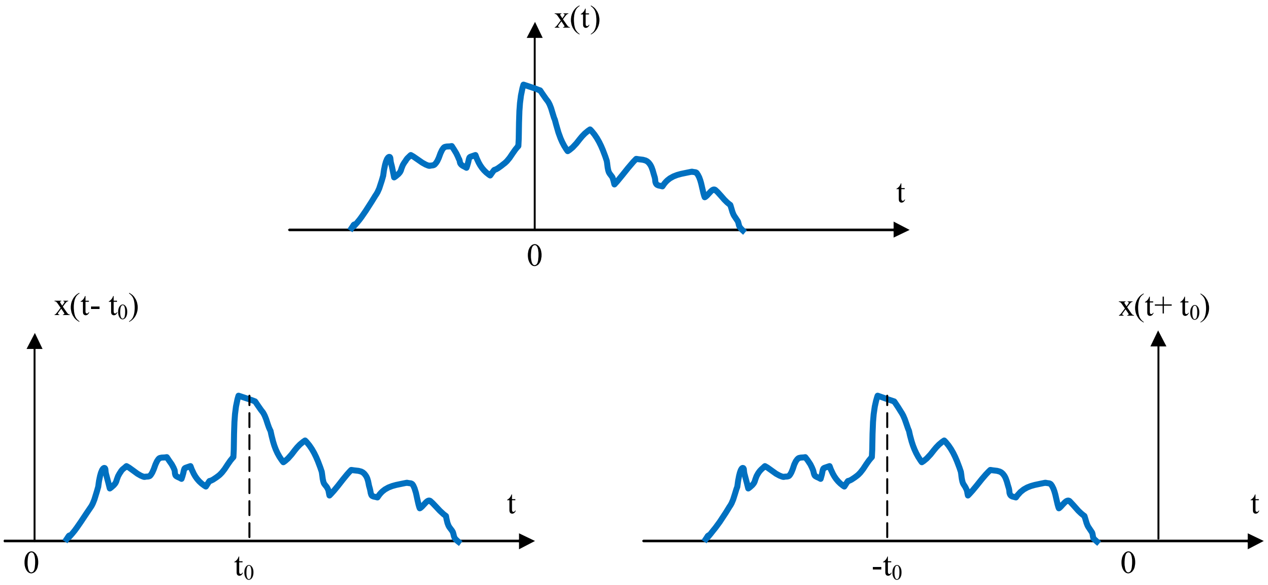
Soit $x(t)$ un signal quelconque. On note par:

$x(t-t_0)$ le signal $x(t)$ retardé de t_0

et par:

$x(t+t_0)$ le signal $x(t)$ avancé de t_0.

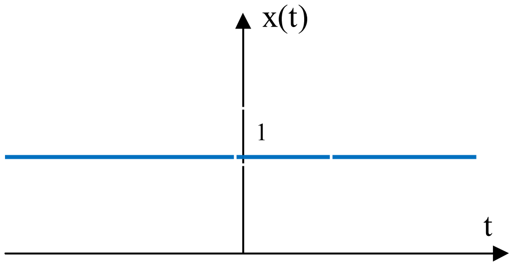
Par convention, le signal $x(t)$ décalé (translaté) de t_0 est défini par $x(t-t_0)$.



Retard **Avance**

3. Signal "Constant"

$x(t) = 1 \quad \forall -\infty < t < \infty$

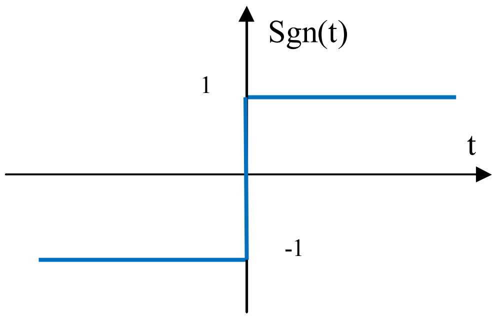


4. Signal "Signe" (Signum)

$$Sgn(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$$

Il peut s'écrire:

$$Sgn(t) = \frac{t}{|t|} \ si\ t \neq 0$$

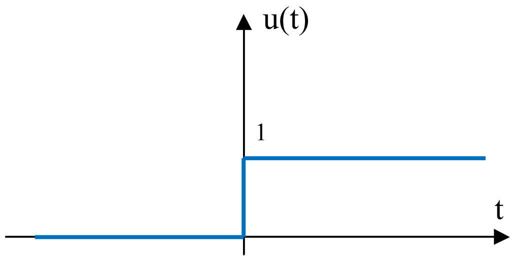


5. Signal "Echelon unitaire" (Heaviside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

$u(t)$ est lié au signal par $Sgn(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Sgn(t)$$



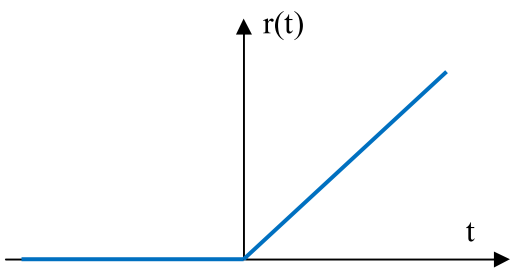
Le signal Echelon unitaire permet de rendre causal un signal non causal:

$$x(t)_{causal} = x(t)_{non\ causal} . u(t)$$

Il est aussi utilisé en identification pour calculer la réponse indicielle d'un système à partir de laquelle la réponse impulsionnelle est déduite, ou pour mesurer le temps de réponse d'un système.

6. Signal "Rampe"

$$r(t) = \begin{cases} t & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

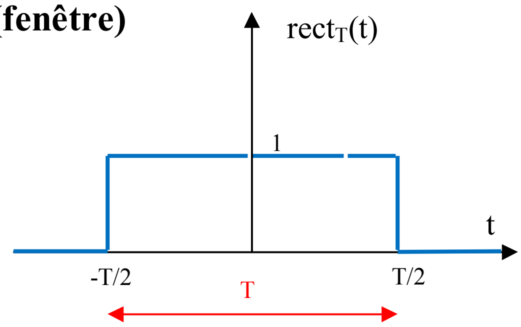


On peut aussi écrire:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

7. Signal "Rectangulaire" ou "Porte" (fenêtre)



$$rect_T(t) = \prod_T(t) = \begin{cases} 1 & si -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

si T=1, $\prod_1(t) = \prod(t)$

Remarquez que:

$$\prod_T(t) = u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

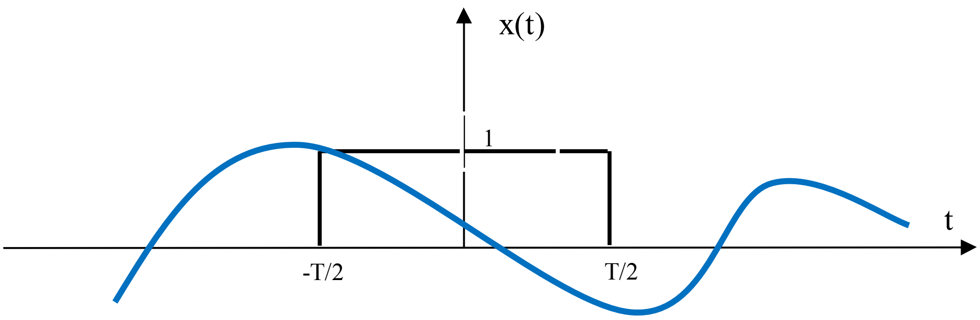
Le signal Porte permet de rendre un signal à puissance moyenne finie, à énergie finie.

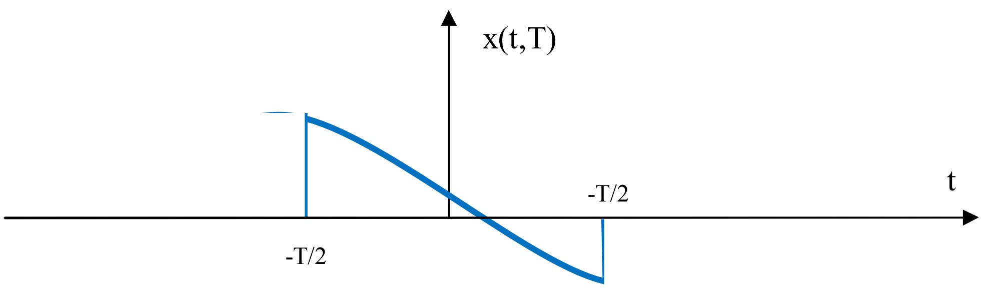
$$x(t)_{énergie\ finie} = x(t)_{puiss\ moy\ finie}.\prod_T(t)$$

Il intervient fréquemment comme un facteur multiplicatif pour localiser un segment de durée T d'un signal quelconque.

$$x(t,T) = x(t)\ .\prod_T(t)$$

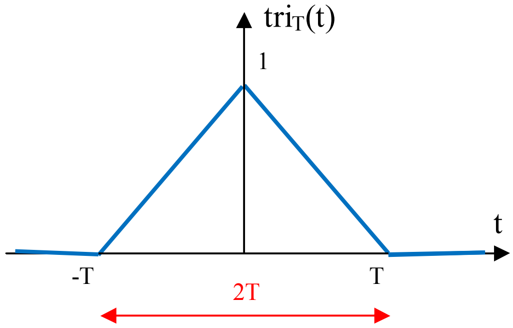
Le signal Porte, utilisée dans le domaine fréquentiel, permet aussi de définir des filtres idéaux, passe-bas, passe-haut ou passe-bande.





8. Signal "Triangulaire"

$$tri_T(t) = \Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & si\ 0 \leq t \leq T \\ 1 + \frac{t}{T} & si - T \leq t \leq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



ou d'une manière plus condensée:

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & si\ |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

si T=1, $\Lambda_1(t) = \Lambda(t)$

On a aussi la relation:

$\Lambda(t) = \prod(t) * \prod(t)$

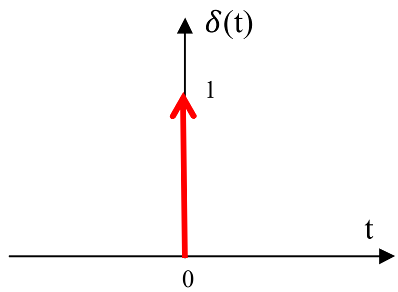
Cette relation permet de déterminer l'auto-corrélation d'un signal rectangle.

Le signal Triangulaire est utilisé à la place du signal Porte dans la localisation d'un segment de durée fixe d'un signal afin de réduire certaines effets indésirables (phénomène de Gibbs).

9. Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$, ou distribution de Dirac ou encore pic de Dirac, est un signal purement théorique qui joue un rôle fondamental en théorie du signal. Il permet notamment de définir la réponse impulsionnelle d'un système.

C'est un signal non réalisable qui possède une durée nulle et une amplitude infinie à t=0.



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & si\ t = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Il est formellement défini par le produit scalaire suivant:

$$< x(t), \delta(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

ou d'un manière générale:

$$\int_a^b x(t)\delta(t)dt = \begin{cases} x(0) & si\ a < 0 < b \\ 0 & si\ a < b < 0\ \ ou\ 0 < a < b \\ indéfini & si\ \ a = b = 0 \end{cases}$$

ou encore par:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt$$

<u>Relation entre $\delta(t)$ et le signal échelon unitaire $u(t)$</u>

Pour un signal constant $x(t) = 1$, on obtient:

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ d'où son appellation "Distribution".

A partir de cette relation, on peut déduire:

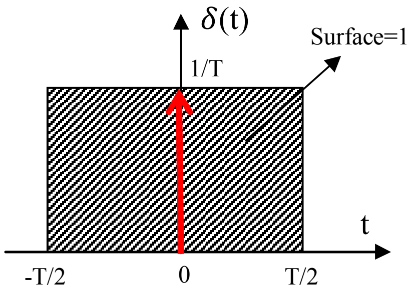
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases} = u(t)$$

où d'une manière inverse:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

<u>Relation entre $\delta(t)$ et le signal porte $\prod_T(t)$:</u>

$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \prod_T(t)$



On a aussi:

$$\prod(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

d'où:

$$\frac{d\prod(t)}{dt} = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

On peut aussi remarquer que $\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \Lambda_T(t)$

<u>Propriétés du pic de Dirac</u>

1) $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$ et $x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t)$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t)dt = A$
3) $\delta^{(n-1)}(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n}$ $\delta'(t)$: Doublet et $\delta''(t)$ Triplet
4) $\delta(t) = \delta(-t)$ (paire) $\delta'(t) = -\delta'(-t)$ (impaire)
5) $\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$
6) $x(t)\,\delta'(t - t_0) = x(t_0)\,\delta'(t - t_0) - x'(t_0)\,\delta(t - t_0)$
7) Si $x(t)$ et $\delta(t)$ indéfiniment dérivables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta^{(n)}(t - t_0)dt = (-1)^n \left.\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right|_{t=t_0} = (-1)^n x^{(n)}(t_0)$$

8) Produit de convolution

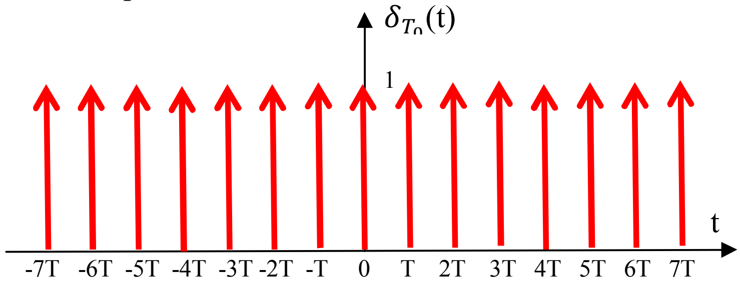
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

10. Peigne de Dirac

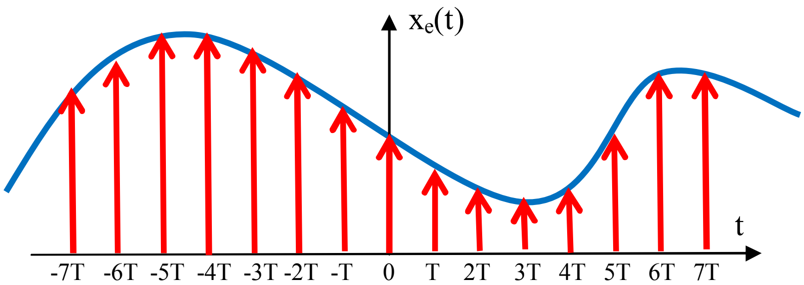
Un peigne de Dirac, Comb en anglais, est un signal périodique formé par une suite d'impulsions de Dirac se répétant avec une période T.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



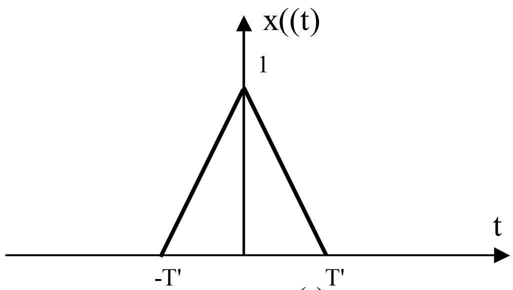
Le peigne de Dirac est utilisée pour définir l'opération d'échantillonnage (Discrétisation d'un signal analogique).

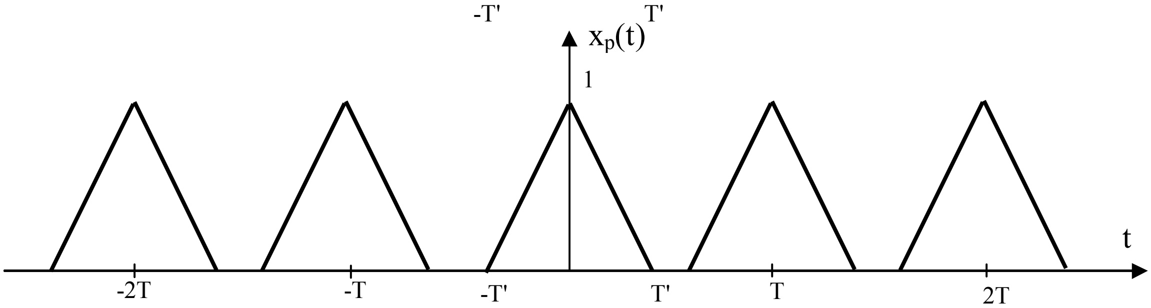
$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$



Il sert aussi à décrire d'une manière plus commode un signal périodique ou à générer un signal $x_p(t)$ périodique à partir d'un signal $x(t)$ non périodique en le répétant à chaque période T.

$$x_p(t) = x(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

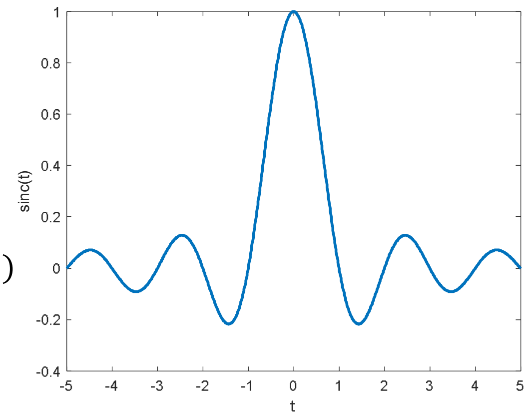




11. Signal "Sinus Cardinal"

En effectuant le rapport du signal sinusoïdal $sin(\pi t)$ par son argument (πt), on obtient un signal normalisé, appelé $sinc(\pi t)$:

$$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$



Propriétés

1)- $sinc(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}^*$ $(t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$

2)- $sinc(t) = sinc(-t)$ (paire)

3)- $\lim_{t \to 0} sinc(t) = 1$

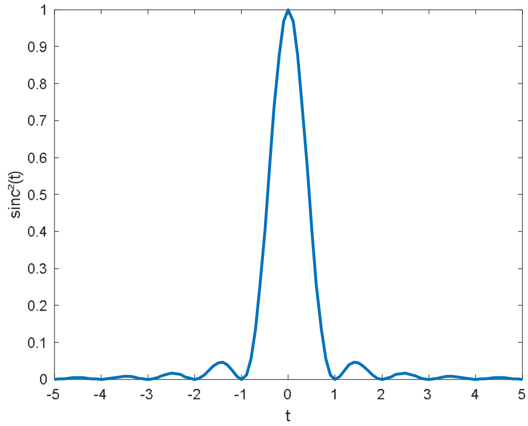
4)- $\lim_{t \to \pm\infty} sinc(t) = 0$

5)- $\lim_{T \to 0} \frac{1}{T} sinc\left(\frac{t}{T}\right) = \delta(t)$

6)- $\int_{-\infty}^{\infty} sinc(t)\, dt = 1$

7)- $\int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(t)\, dt = 1$

8)- $Si(t) = \int_0^t \frac{sin(x)}{x} dx = \pi \int_0^{t/\pi} sinc(x)\, dx$



Les deux relations (6) et (7) indiquent que $sinc(t)$ et $sinc^2(t)$ sont des distributions.

Les signaux $sinc(t)$ et $sinc^2(t)$ sont respectivement liés au transformées de Fourier de $\prod_T(t)$ et $\Lambda_T(t)$ (Chap.4).

12. Impulsion Gaussienne

$ig(t) = e^{-\pi t^2}$

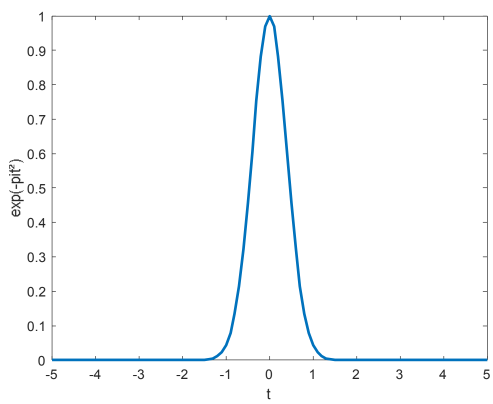
Loi Gaussienne $N(\mu, \sigma)$ est définie par sa fdp:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

or $\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, dt' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t'-\mu}{\sigma}\right)^2} dt' = 1$

En posant $\mu = 0$ et $t' = \sigma\sqrt{2\pi}\, t$, on obtient:

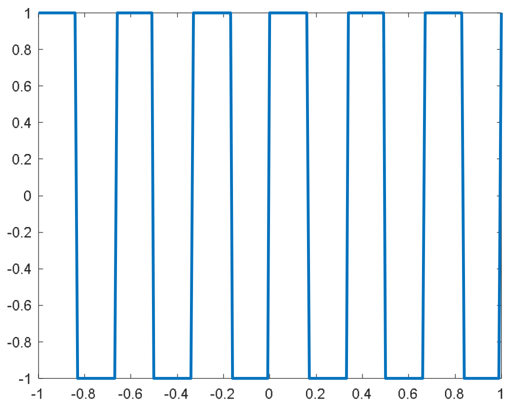
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} ig(t) dt = 1$$



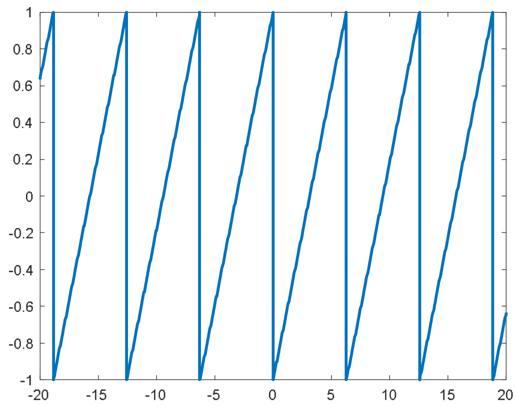
13. Autres signaux

Outre les signaux $x(t) = Asin(2\pi f_0 t)$ et $x(t) = Acos(2\pi f_0 t)$ fréquemment utilisées pour décrire des opérations sur des signaux périodiques, d'autres signaux décrits par des fonctions trigonométriques sont quelques fois employées comme $x(t) = tg(t)$

Comme signaux périodiques, on trouve aussi le signal rectangulaire et le signal dent de scie.



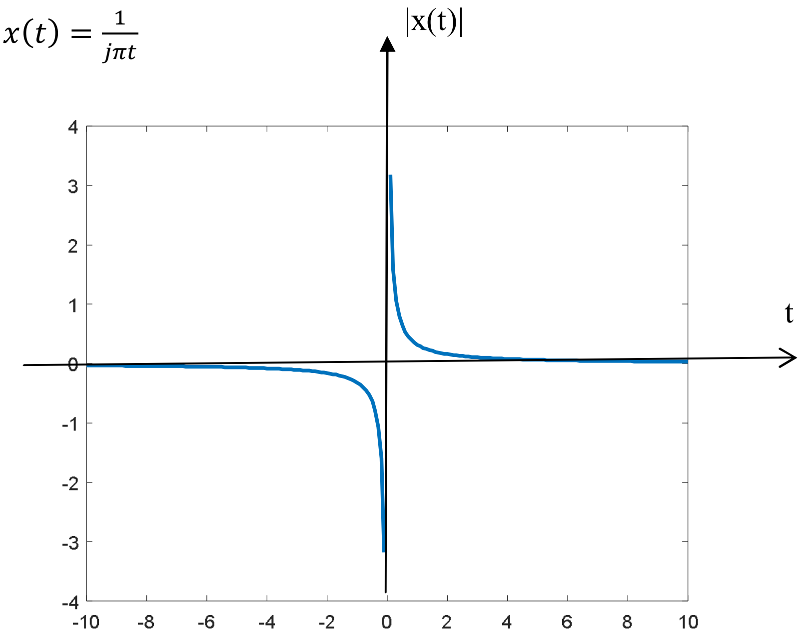
Rectangulaire (square)



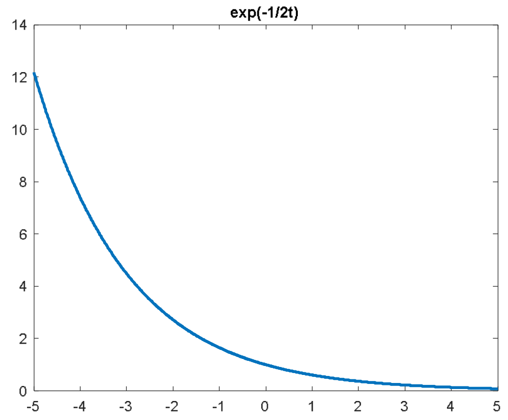
Dent de scie (sawtooth)

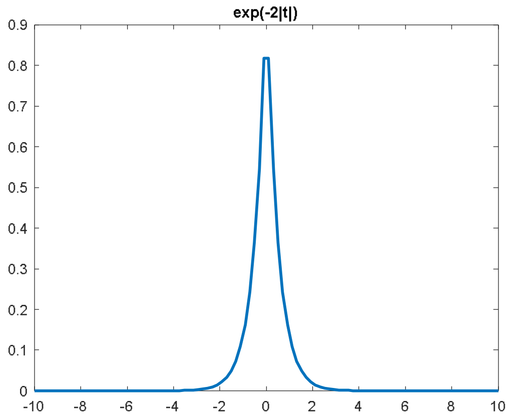
On peut également citer les signaux décrits par des fonctions mathématiques comme:

Fonction inverse $x(t) = \frac{1}{j\pi t}$

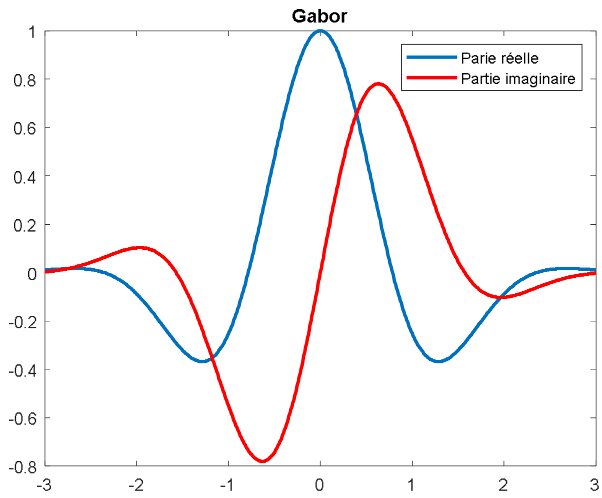


Fonction exponentielle $x(t) = e^{at}$ ou $x(t) = e^{a|t|}$





Fonction de Gabor $x(t) = e^{jkt}.e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$



Fonction polynomiale $x(t) = at^2 + bt + c$ (Parabolique)