Chapitre 1: Introduction à la théorie du signal

1. Introduction

La théorie et le traitement du signal constituent une discipline technique qui a pour but l'élaboration, l'exploitation et l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Ce chapitre présente quelques définitions et notions liées au signal.

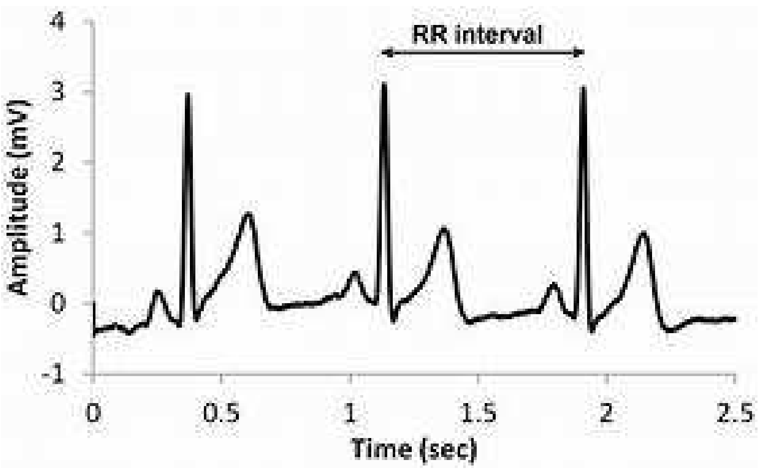
2. Définition d'un signal

Un signal est une représentation physique de l'information qu'il convoie de sa source vers sa destination.
Autrement dit, un signal est un phénomène physique transmettant une information.
Le mot "signal" vient du latin "Signum" qui désigne un geste, un message, un symbole.

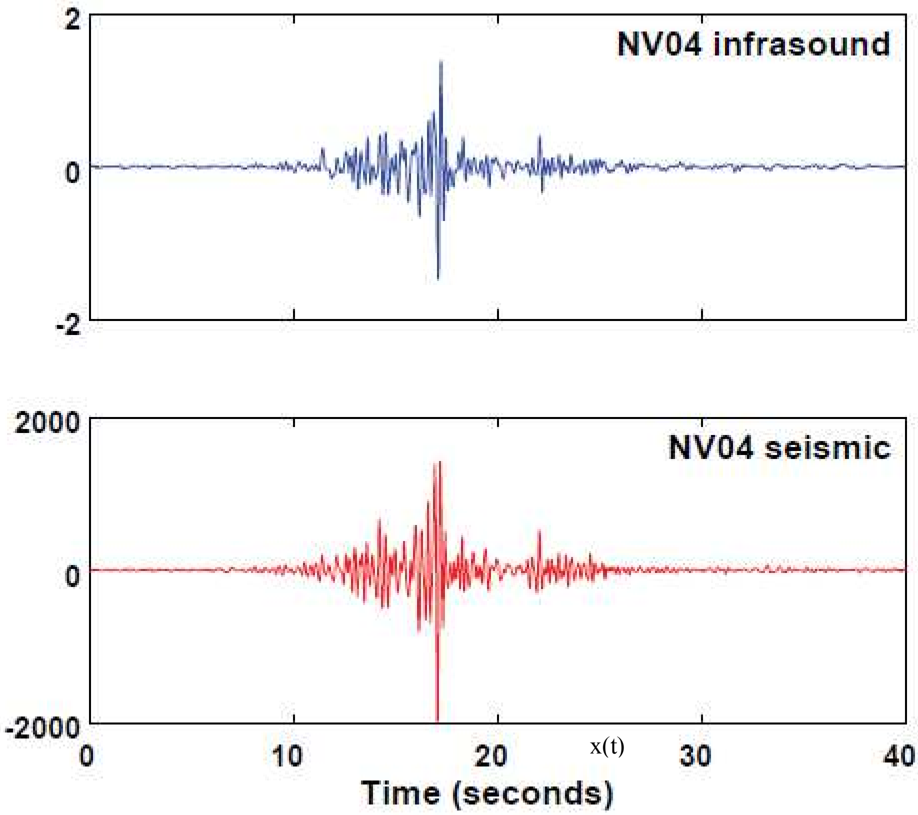
- Physiquement, un signal peut être représenté par une tension, un courant, une onde sonore (parole, cri de SOS), une onde lumineuse, une pression, une température, des vibrations, des battements du cœur, les gestes (Langage des signes), ect...

- Le modèle mathématique d'un signal est une fonction à une, deux ou plusieurs variables.

Signaux monodimensionnels: $x(t)$

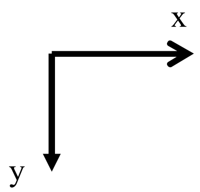


Signal ElectroCardiGramme (ECG)

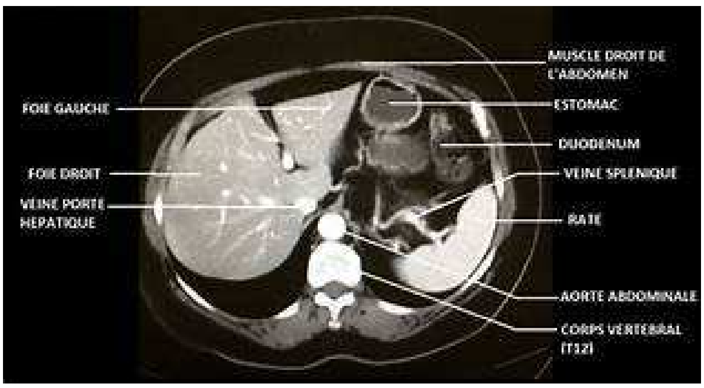


Signal séismique

Signaux bidimensionnels: $\boldsymbol{I(x, y)}$



Cerebrale

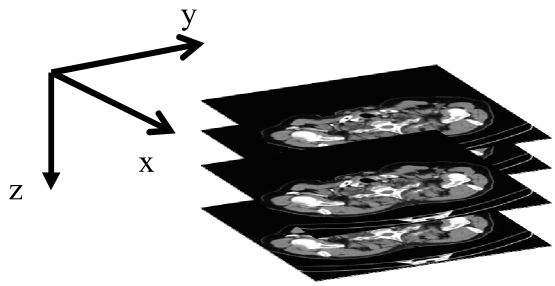


Thoracique

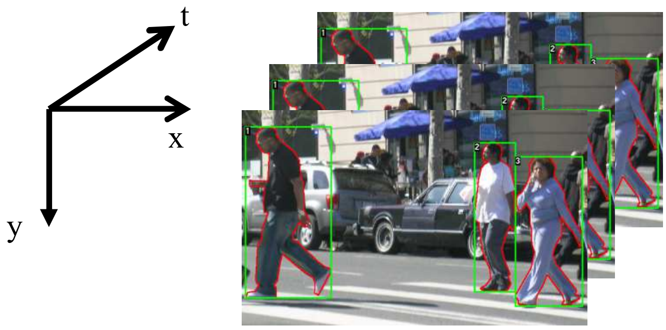
Images IRM fixes

Signaux tridimensionnels

***I*(*x*,*y*,*z*):** Séquence d'images IRM



***I*(*x*,*y*,*t*):**: Séquence vidéo



Dans le domaine technique, un signal représente souvent l'évolution d'une grandeur électrique (courant, tension) en fonction du temps ou d'une autre grandeur physique traduite sous forme électrique par un capteur approprié.

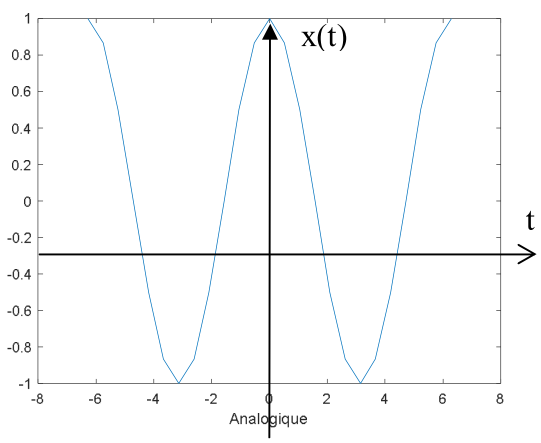
Capteur	Grandeur physique	Grandeur Electrique
Microphone	son	Signal électrique
Caméra	Image	Signal vidéo
Gauge	Déformation	signal électrique
Sonde	Battement du cœur	signal cardiaque
Accéléromètre	Vitesse	Signal électrique

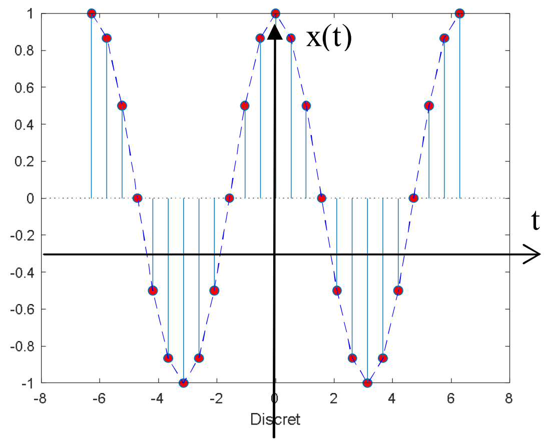
3. Différents types de signaux

On peut classer les signaux en différentes catégories en fonction de leurs caractéristiques.

3.1 Signaux analogiques/discrets

Un signal analogique évolue d'une manière continue. Sa variable temps "t" est une variable continue. Par contre un signal discret (échantillonné ou numérique) est défini qu'à des instants multiples de Δt (pas d'échantillonnage). Sa variable temps "*t*" est discrète.





3.2 Signaux déterministes/aléatoires

On peut aussi distinguer les signaux selon nature déterministe ou aléatoire.

Signaux déterministes

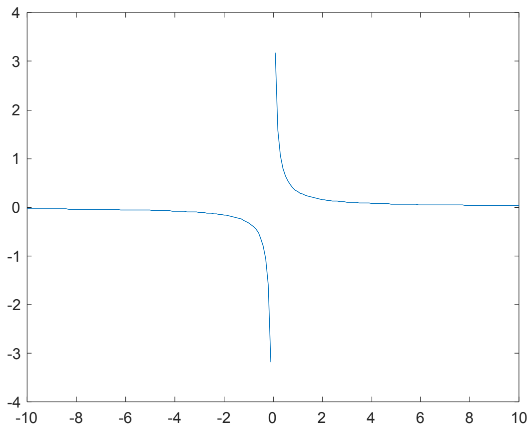
Les signaux déterministes (certains) sont signaux dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite. Ils sont essentiellement utilisés comme signaux de test dans le calcul théorique ou dans laboratoires (Générateurs de signaux).

Les signaux déterministes sont décrits par des fonctions réelles ou complexes:

Réelle: Les valeurs de $x(t)$ sont réelles $x(t) \in \mathbb{R}$

Exemple:

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}$$



Complexe: Les valeurs de $x(t)$ sont complexes $x(t) \in \mathbb{C}$

Dans ce cas, on a:

$x(t) = x_{Re}(t) + jx_{Im}(t) = |x(t)|e^{j\varphi(t)}$

Conjugué: $x^*(t) = x_{Re}(t) - jx_{Im}(t)$

Module: Module: $|x(t)| = \sqrt{x_{Re}^2(t) + x_{Im}^2(t)}$ et $|x(t)|^2 = |x(t)|.|x^*(t)|$

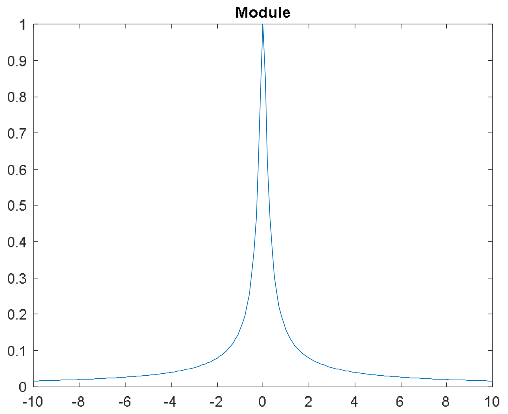
Phase: $\varphi(t) = arctang\left(\frac{x_{Im}(t)}{x_{Re}(t)}\right)$

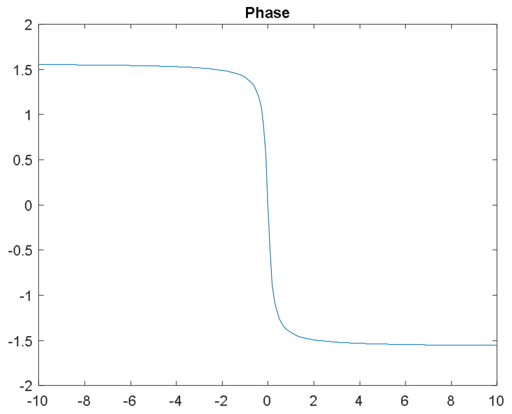
Exemple:

$$x(t) = \frac{1}{1+j2\pi t} \quad \text{ou} \quad x(t) = \frac{1}{1+(2\pi t)^2} - j\frac{2\pi t}{1+(2\pi t)^2}$$

$$|x(t)| = \sqrt{\frac{1}{1+4\pi^2 t^2}}$$

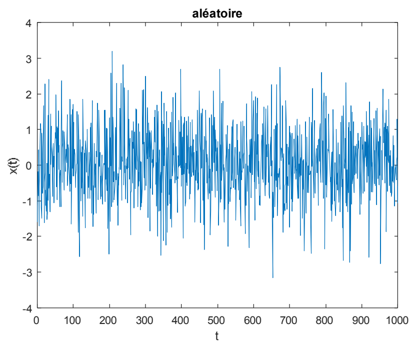
$$\varphi(t) = arctang(-2\pi t) = -arctang(2\pi t)$$

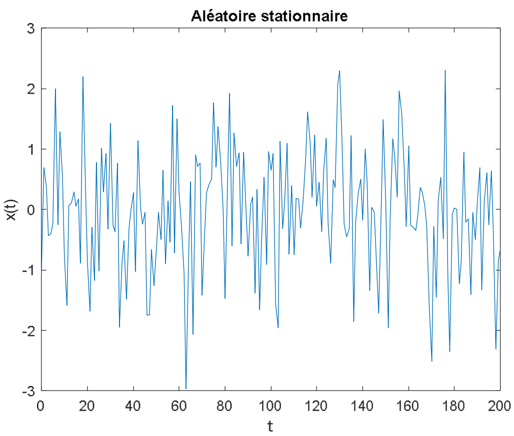


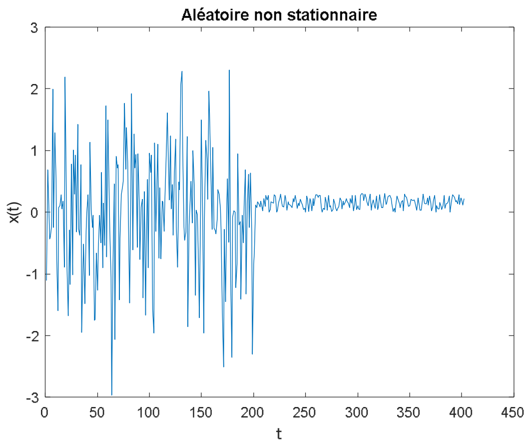


Signaux aléatoires

Les signaux aléatoires ne sont pas décrits par des fonctions, leur évolution en fonction du temps est imprévisible. On les décrit par des observations statistiques (moyenne, variance, fonction de densité de probabilité,...).







<u>Remarque</u>: Si les caractéristiques statistiques sont invariants dans le temps, le signal aléatoire est dit stationnaire. Il est dit non stationnaire dans le cas contraire.

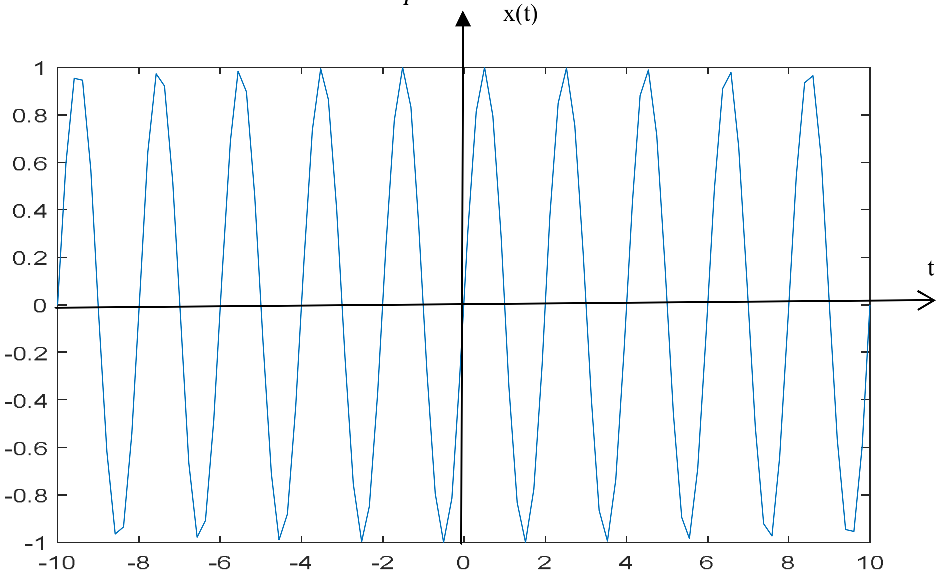
Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux:
- périodiques
- non périodiques
- pseudo aléatoires
- quasi périodiques

3.2.1 Signaux périodiques

Un signal est périodique de période T s'il se répète d'un manière identique à des instants multiple de T

$$x(t) = x(t + \alpha T) \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

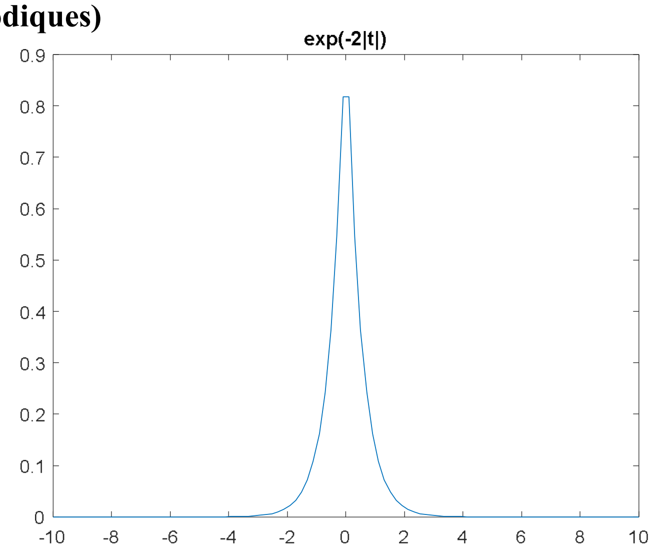
Exemple: $x(t) = Asin(2\pi f t) \quad f = \frac{1}{T}$



3.2.2 Signaux non périodiques (apériodiques)

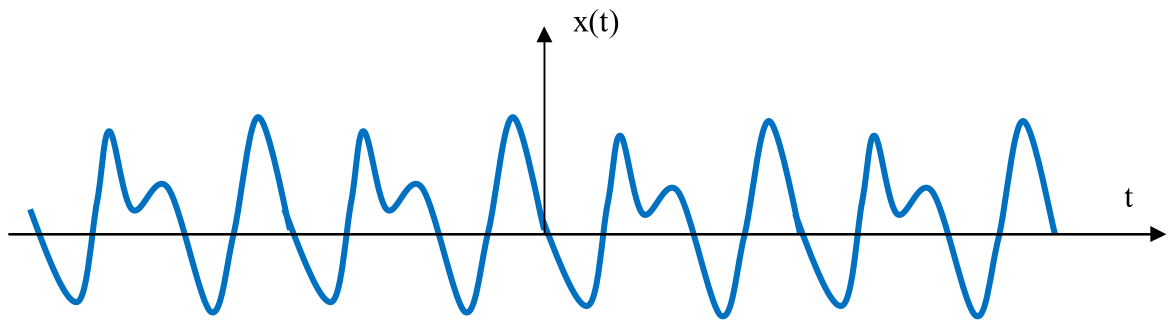
Apparition d'aucune répétition.

$x(t) \neq x(t + \alpha T) \quad \alpha \in \mathbb{N}$

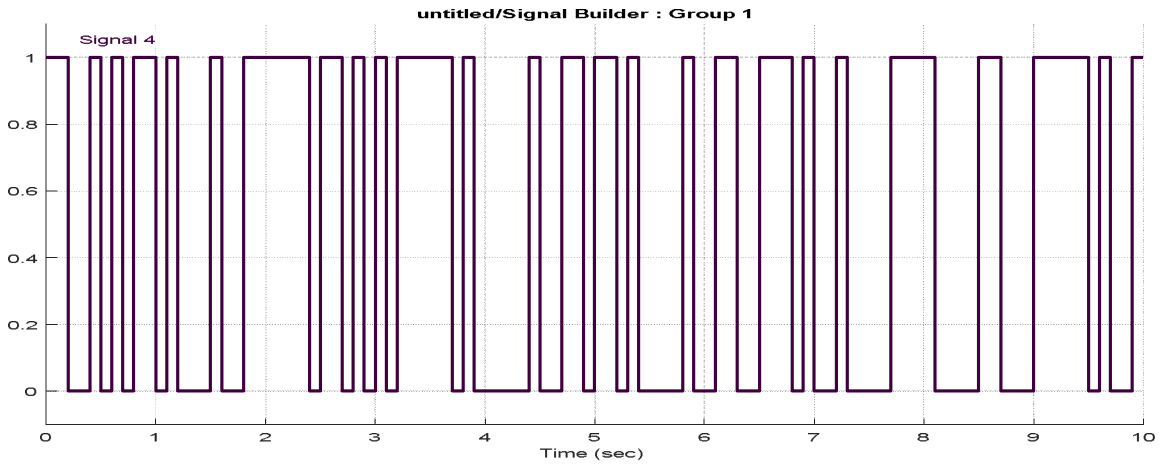


3.2.3 Signaux pseudo aléatoires

Ce sont des signaux périodiques dont le comportement rappelle celui des signaux aléatoires.



Signal SBPA (Signal Binaire Pseudo Aléatoire), très utilisé en identification

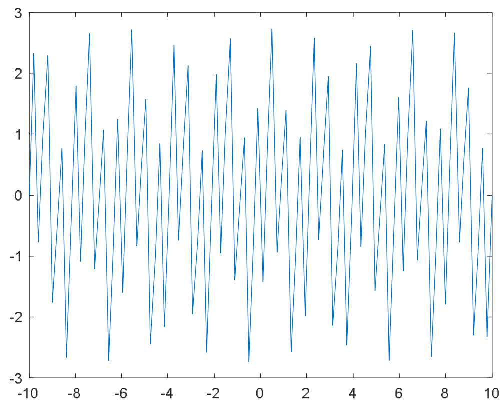


3.2.4 Signaux quasi périodiques

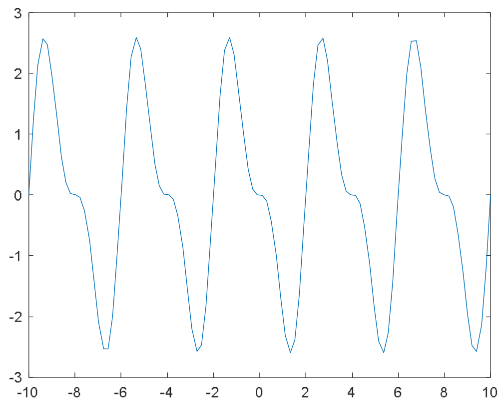
Ce sont des signaux non périodiques qui résultent d'une somme de signaux sinusoïdaux de périodes incommensurables.

$x(t) = \sum_k^K A_k sin(2\pi f_k t)$ avec $f_{k+1} = \lambda f_k$ $\lambda \in \mathbb{Q}$ $(irationnel)$

Exemple $K = 2$; $A_1 = A_2 = 1$; $f_1 = 50Hz$,



Quasi périodique $\lambda = 0.33$ (irrationnel)



Périodique $\lambda = 0.5$ $(rationnel)$

3.3 Signaux à énergie finie/puissance moyenne finie

On peut distinguer des signaux selon leur nature énergétique. L'énergie d'un signal correspond en quelque sorte à sa force.

Valeur moyenne sur un intervalle de temps T

$$\overline{x(T)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$$

Valeur moyenne sur tout l'axe des réels

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$$

Energie sur un intervalle de temps T:

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad si \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt \quad si \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

$$W_x(t_0, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Puissance moyenne sur un intervalle de temps T:

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad si \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

$$P_x(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Energie totale :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad si \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \quad si \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

Puissance moyenne totale:

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Signaux à Energie finie : Ils possèdent une énergie totale finie et une puissance moyenne totale nulle (P_x=0).

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \ < \infty$$

Ils sont réalisables.

Remarque: Tout signal borné dans le temps est à énergie finie.

Signaux à puissance moyenne finie : Ils possèdent une puissance moyenne totale finie et non nulle. Leur énergie totale est infinie (W_x=∞).

$$0 < P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \ < \infty$$

Ils ne sont pas réalisable physiquement.

Remarque 1: Tout signal non borné dans le temps est à puissance moyenne finie.

Exemples: Signaux périodiques, quasi périodiques, aléatoires permanents.

Remarque 2: La plus part des signaux sont soit à énergie finie, soit à puissance moyenne finie. Cependant, il existent certains signaux qui ne sont ni à énergie finie ni à puissance moyenne finie.

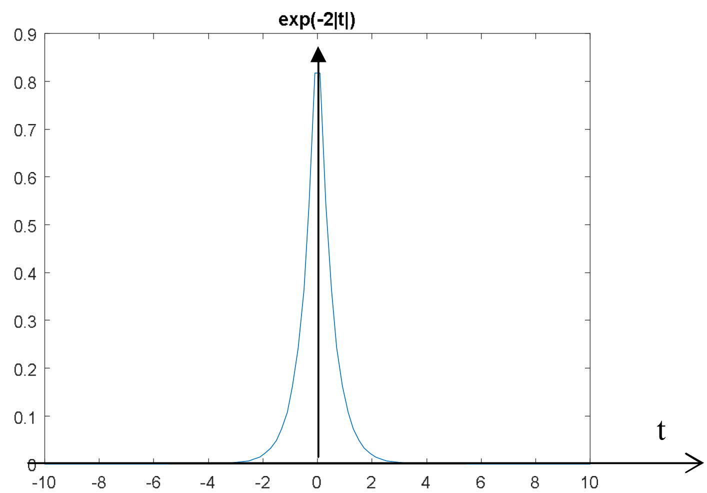
Exemples: $x(t) = e^{at}$

3.4 Signaux pairs/impairs

Paire : $x(t) = x(-t)$

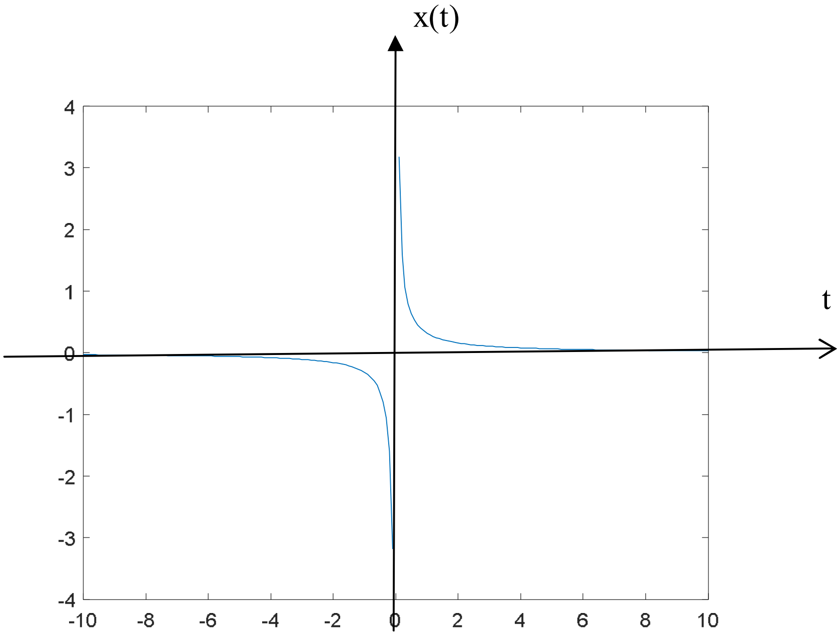
Exemples: $x(t) = Acos(2\pi f t)$

$x(t) = exp^{-2|t|}$



Impaire: $x(t) = -x(-t)$

Exemples: $x(t) = Asin(2\pi ft)$ $\quad x(t) = \frac{1}{\pi t}$



Remarque:

Tout signal $x(t)$ peut être décomposé en une partie paire $x_p(t)$ et une partie impaire $x_i(t)$ tel que:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

avec

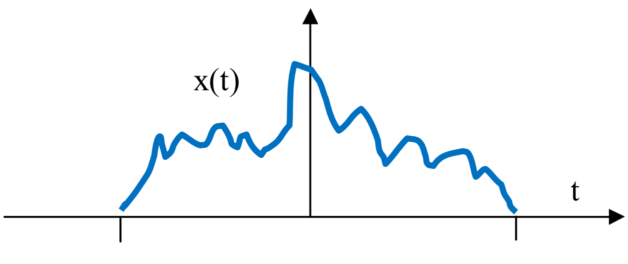
$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

3.5 Signaux à support borné

Ce sont des signaux qui ont une durée finie (déterminée), délimitée par une borne supérieure et une borne inférieure. et qui s'annulent au delà de ces bornes.

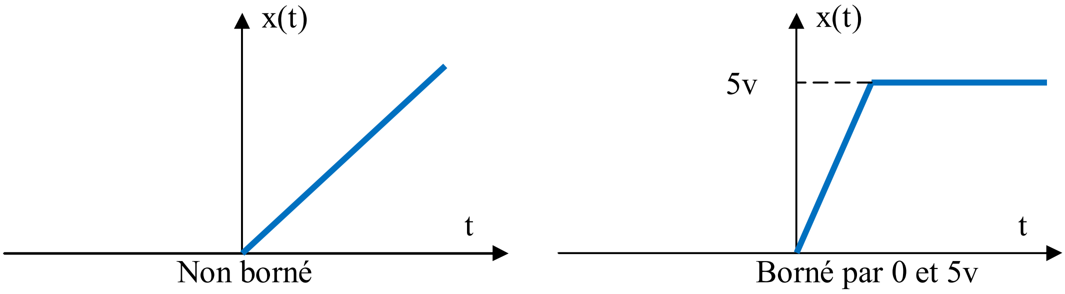
$x(t) = 0 \quad pour \quad t \notin T$



3.6 Signaux borné en amplitude

L' amplitude augmente indéfiniment.

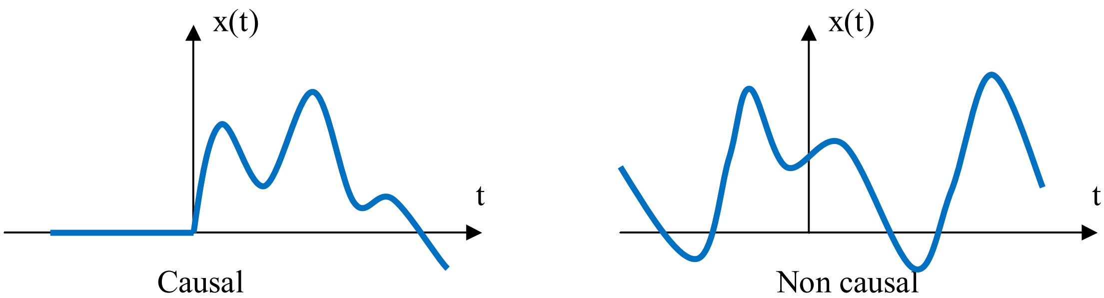
$$|x(t)| \leq K \; (constante)$$



3.7 Signaux causals

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps.

$$x(t) = 0 \quad pour \;\; t < 0$$



Remarque:

En pratique, tous les signaux sont causals, ce n'est que pour des commodités théoriques qu'on définit un signal sur tout l'axe des temps.

4. Définition du bruit

On appelle bruit (noise en anglais) tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal utile. Un problème fondamental en traitement du signal sera d'extraire le signal utile du bruit (débruitage, filtrage).

Le bruit peut avoir une origine interne ou externe par rapport au système qui génère le signal utile:

Bruits externes: Parasites générés par des équipements artificiels (vibrations des moteurs, lignes à haute tension, éclairage, activité humaine, téléphones portables, etc) ou par des phénomènes naturels comme les phénomènes atmosphériques (foudre, orage) ou cosmiques (ondes électromagnétiques émises par les étoiles, éruptions solaires).

Remarque: On peut luter contre les bruits externes (blindage, cage de Faraday; table anti vibrations, chambre noire, ...)

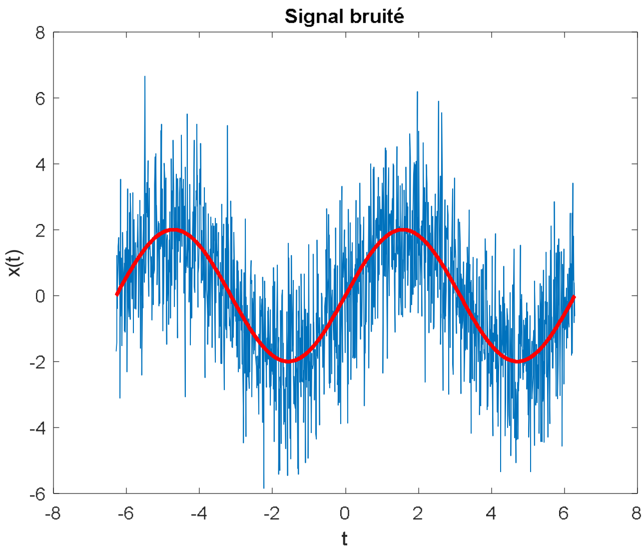
Bruits internes: Bruit impulsionnel engendré par les commutateurs de courant (comparateurs, circuits logiques) ou bruit de fond généré par les composants électroniques lors du déplacements des électrons sous l'effet de la température (thermique) ou par les fluctuations du nombre de trous et d'électrons pendant la création du courant (bruit grenaille).

Le bruit est aussi un signal qui évolue dans le temps. Il peut être:

additif: $x(t)= u(t)+b(t)$

multiplicatif: $x(t)=u(t).b(t)$

convolutif: $x(t)=u(t)*b(t)$



Remarque: Le bruit est un signal aléatoire

Pour mesurer le degré de contamination d'un signal utile par le bruit, on utilise le rapport Signal sur bruit en décibels, défini par:

$$\varepsilon_{db} = 10log_{10}\varepsilon$$

avec $\varepsilon = \frac{P_s}{P_b} = \frac{Puissance\ du\ signal\ utilie}{Puissance\ du\ bruit}$

Remarque: Si le bruit est considéré en général comme nuisible, il est parfois considéré comme information importante (signal utile). C'est le cas par exemple en Radioastronomie, dans la détection des défauts (vibrations industrielles).

5. De la théorie du signal au traitement du signal

Le traitement du signal est la discipline technique qui s'appuie sur des enseignements de la théorie du signal et de l'information ainsi que des ressources de l'électronique, d'informatique et de physique appliquée dans le but d'élaborer, d'extraire ou d'interpréter des signaux porteurs informations.

La théorie du signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement.

La théorie de l'information (ou de communication) est l'ensemble des méthodes de codage qui permet de décrire la transmission de messages véhiculés d'une source vers un destinataire. Le codage définie un ensemble de règles spécifiant le mode représentation du message et pour objectif de compresser le signal (éliminer les redondances), de détecter et corriger les erreurs, et assurer une confidentialité (cryptographie).

6. Domaines d'application

La théorie et le traitement du signal intéresse tous les secteurs techniques et scientifiques dans lesquels l'information est perçue par l'intermédiaire d'observations expérimentales de grandeurs mesurables. Le champ d'application du traitement du signal est vaste et varié:

- Télécommunications
- Séismologie
- Astronomie
- Radar-Sonar
- Biométrie (parole, visages, empreintes, iris)
- Reconnaissance des formes en général (types de bois, de tissus, ...)
- Diagnostique des systèmes (Détection et reconnaissance des défauts mécanique, électriques).
- Contrôle non destructif (CND).

-Médecine (signaux électrocardiogramme (ECG), Electroencéphalogramme (EEG), Activité respiratoire, ...) et Imagerie médicale (Radiographie, IRM, scanner, endoscopie, scintigraphie).