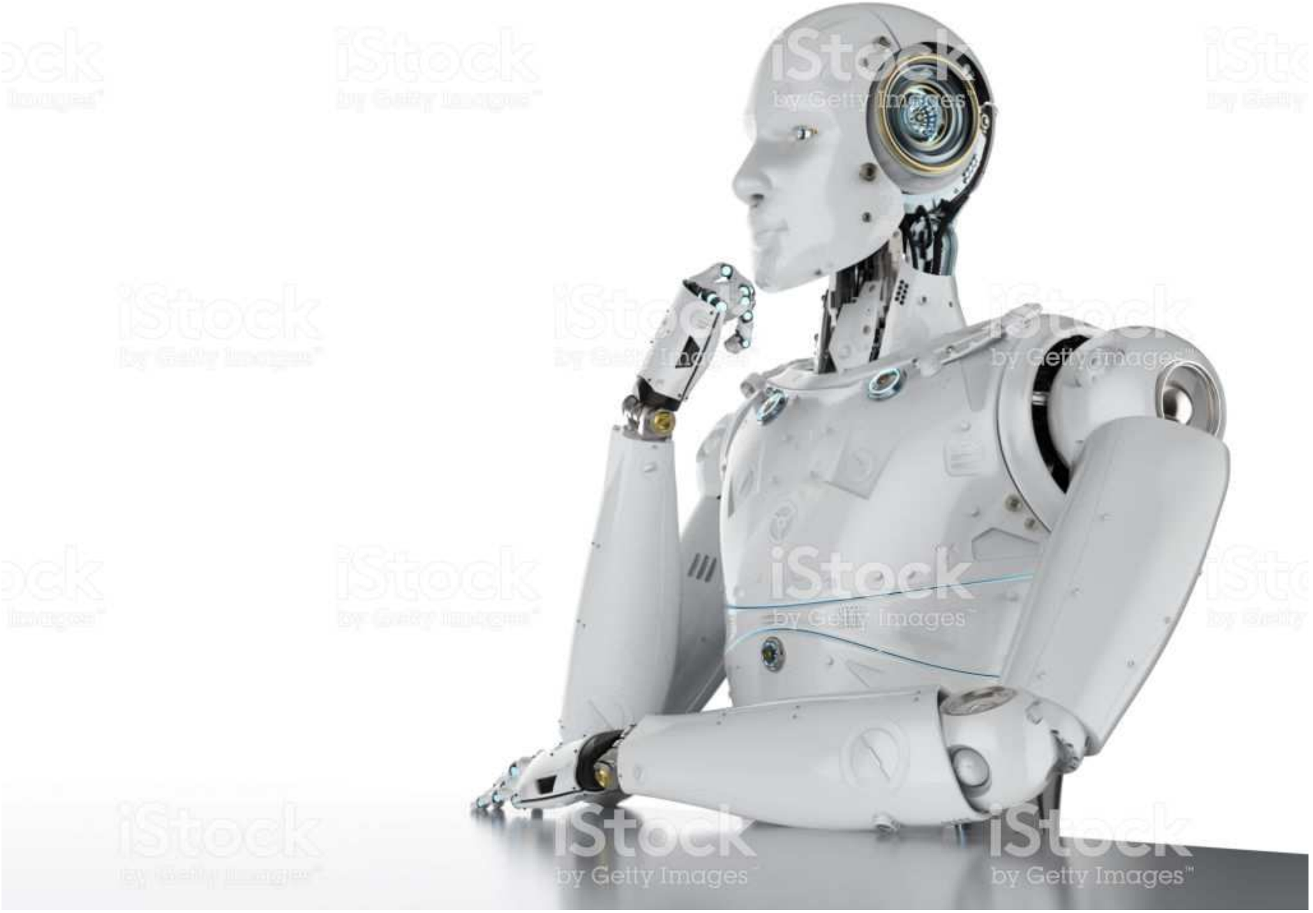
# Chapitre 1 : modèle géométrique direct



# Transformations Homogènes

## Transformation de repères:

Soit un corps solide S, un repère $\{R_S\}$ lié à ce solide et un repère fixe $\{R_0\}$

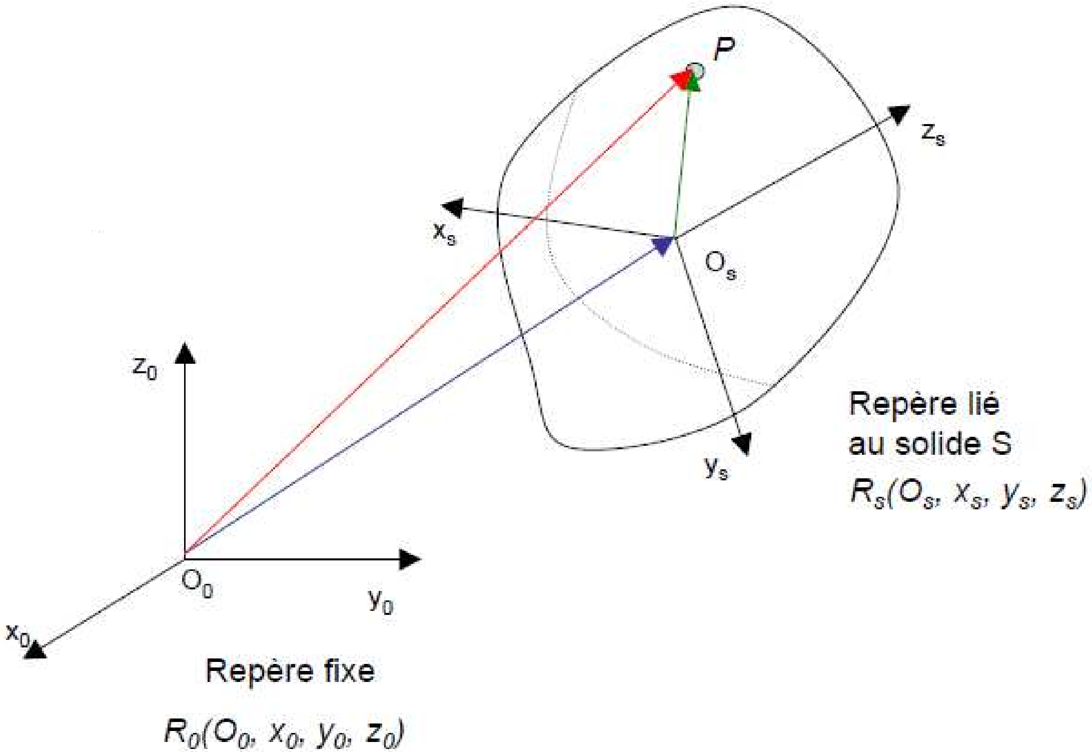
Tout point P du solide admet des coordonnées qui peuvent être exprimées dans $\{R_0\}$ ou $\{R_s\}$ telles que:

$$\overrightarrow{O_0P}_{/R_0} = \begin{pmatrix} P_{x_0} \\ P_{y_0} \\ P_{z_0} \end{pmatrix}_{/R_0} = P_{x_0}\vec{x}_0 + P_{y_0}\vec{y}_0 + P_{z_0}\vec{z}_0 \ :$$

Coordonnée de P exprimées dans $\{R_0\}$

$$\overrightarrow{O_SP}_{/R_S} = \begin{pmatrix} P_{x_S} \\ P_{y_S} \\ P_{z_S} \end{pmatrix}_{/R_S} = P_{x_S}\vec{x}_S + P_{y_S}\vec{y}_S + P_{z_S}\vec{z}_S \ :$$

Coordonnée de P exprimées dans $\{R_s\}$




$$\overrightarrow{O_0O_S}_{/R_0} = \begin{pmatrix} T_{x_0} \\ T_{y_0} \\ T_{z_0} \end{pmatrix}_{/R_0} = T_{x_0}\vec{x}_0 + T_{y_0}\vec{y}_0 + T_{z_0}\vec{z}_0$$ : coordonnées de l'origine $O_s$ du repère $R_s$ exprimées dans le repère $R_0$

# Transformations Homogènes

### Transformation de repères:

La relation de Chasles permet d'écrire:

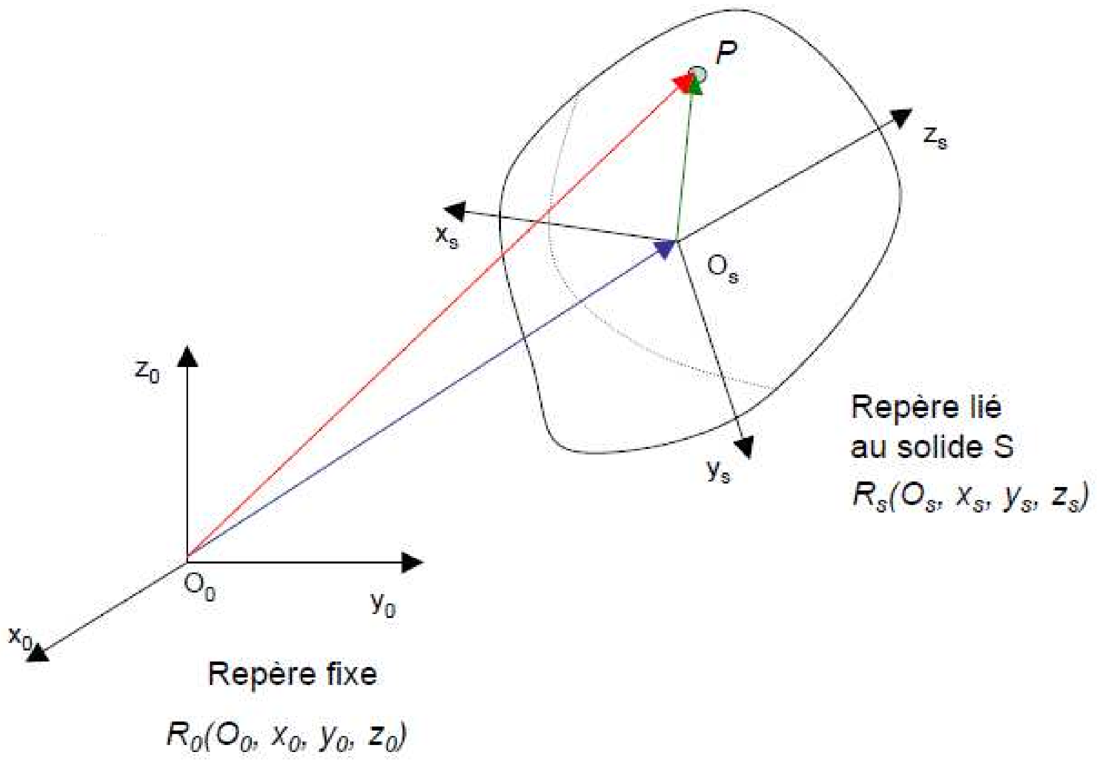
$$\overrightarrow{O_0P}_{/R_0} = \overrightarrow{O_0O_S}_{/R_0} + \underbrace{\overrightarrow{O_SP}_{/R_0}}_{?}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_0P}_{/R_0} = \overrightarrow{O_0O_S}_{/R_0} + R_{0,S}\,\overrightarrow{O_SP}_{/R_S}$$

$R_{0,S}$ : est la matrice de passage du repère $\{R_S\}$ vers le repère $\{R_0\}$. Elle exprime la rotation (orientation) de $\{R_S\}$ vis-à-vis de (par rapport à) $\{R_0\}$

$\overrightarrow{O_0O_S}_{/R_0}$ : est le vecteur position du repère $\{R_S\}$ par rapport au repère $\{R_0\}$. Il exprime les coordonnées de l'origine du repère $\{R_S\}$ dans le repère $\{R_0\}$.

$$\begin{pmatrix} P_{x_0} \\ P_{y_0} \\ P_{z_0} \end{pmatrix}_{/R_0} = \begin{pmatrix} T_{x_0} \\ T_{y_0} \\ T_{z_0} \end{pmatrix}_{/R_0} + R_{0,S} \begin{pmatrix} P_{x_S} \\ P_{y_S} \\ P_{z_S} \end{pmatrix}_{/R_S}$$



# Transformations Homogènes

## Transformation de repères:

Notations simplifiées :

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \overrightarrow{O_0P}_{/R_0} \\ t_{0,S} = \overrightarrow{O_0O_S}_{/R_0} \\ p_S = \overrightarrow{O_SP}_{/R_S} \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = t_{0,S} + R_{0,S}\; p_S$$

La matrice d'orientation (de rotation) $R_{0,S}$ est définie telle que les éléments de ses colonnes sont les projections des vecteurs unitaires du repère $R_s$ par rapport aux vecteurs unitaires du repère $R_0$ :

$$R_{0,S} = \begin{bmatrix} \langle x_s \mid x_0 \rangle & \langle y_s \mid x_0 \rangle & \langle z_s \mid x_0 \rangle \\ \langle x_s \mid y_0 \rangle & \langle y_s \mid y_0 \rangle & \langle z_s \mid y_0 \rangle \\ \langle x_s \mid z_0 \rangle & \langle y_s \mid z_0 \rangle & \langle z_s \mid z_0 \rangle \end{bmatrix}$$

La transformation inverse : passage du repère $R_0$ vers le repère $R_S$

⇨ Exprimer les coordonnées de P dans le repère $R_S$ en passant par le repère $R_0$

$$p_S = -R_{0,S}^{-1} t_{0,S} + R_{0,S}^{-1}\; p_0$$

La connaissance de $R_{0,S}$ et $t_{0,S}$ suffit donc pour passer aisément d'un repère à l'autre !!!

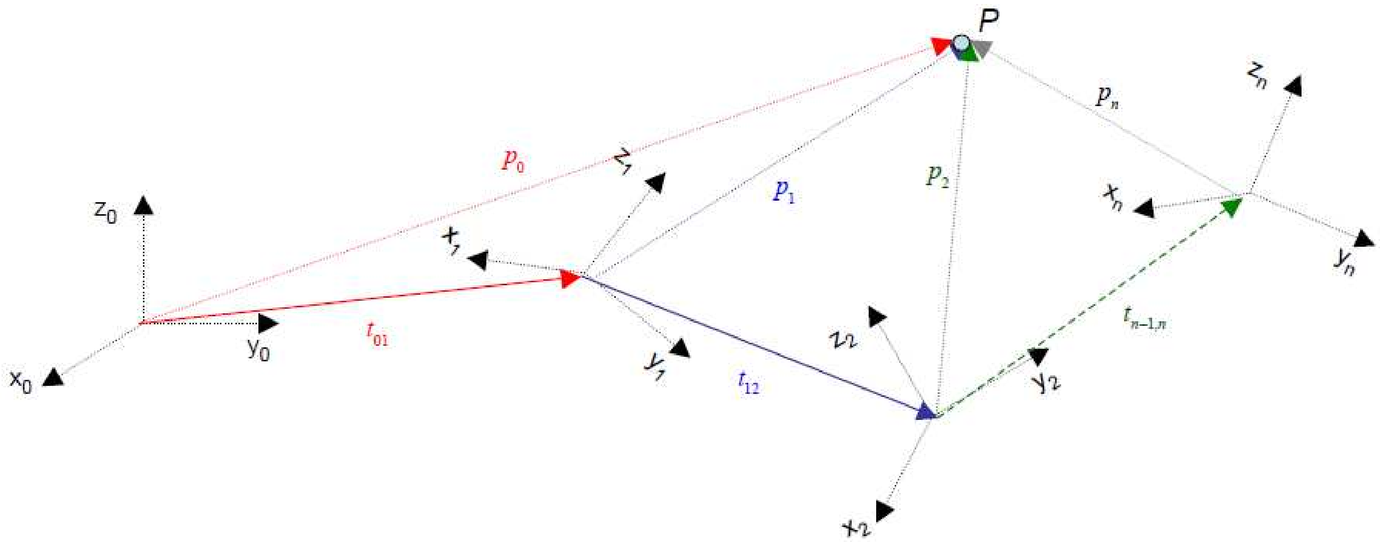
**Propriétés des matrices de passages:**

Si $\{R_0\}$ et $\{R_S\}$ sont des repères orthonormés alors : $R_{0,S} R_{0,S}^T = I \Leftrightarrow R_{0,S}^{-1} = R_{0,S}^T = R_{S,0}$

On a alors : $p_S = -R_{0,S}^T t_{0,S} + R_{0,S}^T\; p_0$

# Transformations Homogènes

## Transformations successives de repères




$$\left.\begin{array}{c} p_0 = t_{0,1} + R_{0,1}\ p_1 \\ p_1 = t_{1,2} + R_{1,2}\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} = t_{n-1,n} + R_{n-1,n}\ p_n \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = t_{0,1} + R_{0,1}\left(t_{1,2} + R_{1,2}\left(t_{2,3} + R_{2,3}\left(\cdots + R_{n-2,n-1}\left(t_{n-1,n} + R_{n-1,n}\ p_n\right)\right)\right)\right)$$

**Le passage par n repères différents implique l'expression de $p_0$ sous forme polynomiale d'ordre n !**

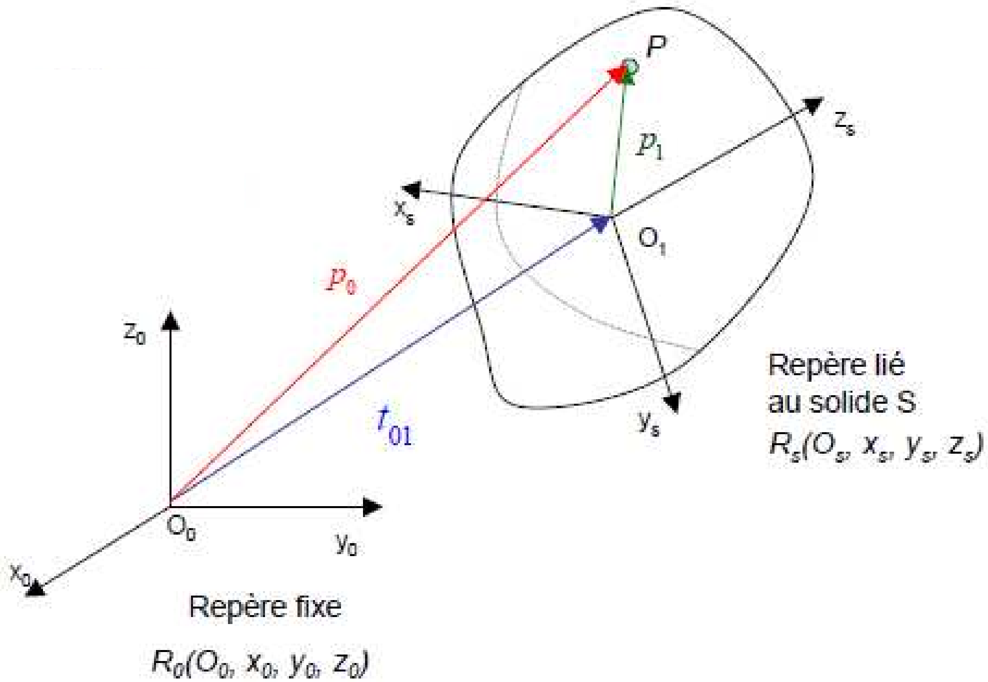
**Comment simplifier cette expression?**

# Transformations Homogènes

## Transformations homogènes:

Soit la transformation de repère donnée par:

$$p_0 = t_{0,1} + R_{0,1}\, p_1 \quad (1)$$




On définit les **vecteurs de position augmentés** (**coordonnées homogènes**):

$$\overline{p}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \\ p_{z0} \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \overline{p}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit la transformation homogène :

$$\overline{p}_0 = A_{0,1}\, \overline{p}_1 \quad (2)$$

Où $A_{0,1} = \left[\begin{array}{c|c} R_{0,1} & t_{0,1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ est appelée matrice de transformation homogène (4x4).

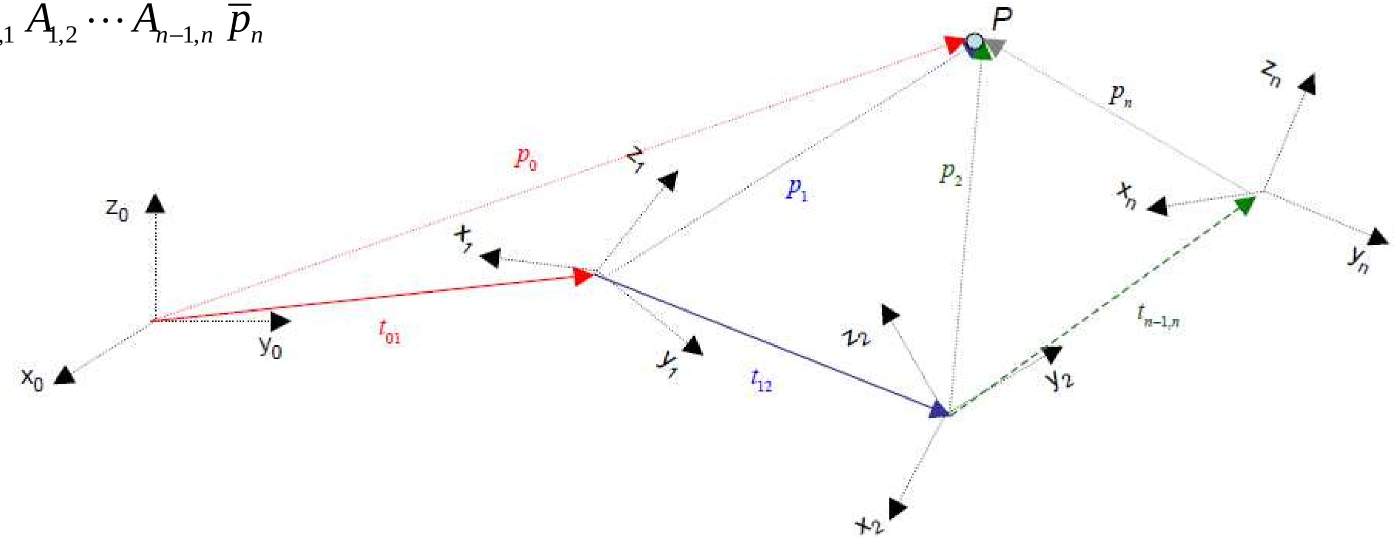
Exercice : démontrer que les transformations (1) et (2) sont équivalentes.

# Transformations Homogènes

**Transformations homogènes successives**

Exprimer les coordonnées du point P dans le repère {$R_0$} en passant par les repères {$R_n$},…,{$R_1$}

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_0 &= A_{0,1}\,\bar{p}_1 \\ \bar{p}_1 &= A_{1,2}\,\bar{p}_2 \\ &\vdots \\ \bar{p}_{n-1} &= A_{n-1,n}\,\bar{p}_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{p}_0 = A_{0,1}\,A_{1,2}\cdots A_{n-1,n}\,\bar{p}_n$$




$$\bar{p}_0 = A_{0,n}\,\bar{p}_n$$

Avec :

$$A_{0,n} = \left[\begin{array}{c|c} R_{0,n} & t_{0,n} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

**Inverse d'une matrice homogène:** $A_{i,i-1} = A_{i-1,i}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R_{i-1,i}^{T} & -R_{i-1,i}^{T}\,t_{i-1,i} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$ (à démontrer en exercice)