(P13) 17/10/2017

TD n: 1

exo 1 :

1)- choix des variables de décision :

x_1 : la quantité du produit P1

x_2 : " " " " P2

1 unité de P1 → 5 unités

x_1 " " " → X

1 unité de P2 → 6 unités

x_2 " " → X

2). du tableau : M1

1 unité de P1 $\xrightarrow{\text{utilise}}$ 2 unités de M1

x_1 " " $\xrightarrow{\text{utilise}}$ X

1 unité de P2 → 1 unité de M1

x_2 " " → X.

$2x_1 + x_2 \leq 800$

on a : $M \leq 800$.

la même chose pour M2 et M3.

3)- Modèle d'optimisation :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \text{Max} \\ s.c : \\ 2x_1 + x_2 \leq 800 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 700 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

exo 2

x_1 : quantité du café type 1

x_2 : " " type 2

café type 1 : 140 DA

café type 2 : 170 DA

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 140x_1 + 170x_2 \rightarrow (\text{Max}) \\ s.c : \\ 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \leq 2000 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 \leq 3000 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 5000 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

exo3

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to (\max) \\ \text{s.c :} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

exo4 :

→ Rappel :

. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2

on note $Hf(x)$ sa matrice hessienne :

⊕ - Si $Hf(x)$ est semi-définie positive (≥ 0) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors f est convexe.

⊕ . Si $Hf(x)$ est définie positive (> 0) : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors f est strict convexe.

⊕ . Si $Hf(x)$ est semi-définie négative (≤ 0), $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors f est concave.

⊕ - Si $Hf(x)$ est définie négative (< 0) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors f est

cas monovariable :

⊕ - $f'' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est convexe

⊕ - $f'' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement convexe.

⊕ . $f'' \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est concave

⊕ . $f'' < 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement concave.

.....

$$* \left. \begin{array}{l} f_1(x) = x^2 \\ f_1'(x) = 2x \\ f_1''(x) = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est strictement convexe.}$$

$$* f_2(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df_2}{dx_1} \\ \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - 2x_2 + x_1 \\ -2 - 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad n = \text{pair}$$

- calcul des mineurs principaux :

$\Delta 1 = 1 > 0$
$\Delta 2 = -3 < 0$ $\Rightarrow \nabla^2 f_2(x)$ est indéfinie donc f_2 ni convexe ni concave.

Scanned by CamScanner

$(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f_3(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_3(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 4 > 0 \Rightarrow \nabla^2 f_3$ est définie positive $\forall x$.

$\Rightarrow f_3$ est strictement convexe.

24/10/2017

$*$ $f_4(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 2x_2 + 10$

$$\nabla f_4(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 1 \\ -10x_2 + 3x_1 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_4(x) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 11 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_4(x) < 0 \ \forall x$$

(définit négative)

$\Rightarrow f_4(x)$ est strictement concave.

$*$ $f_5(x) = 1 + x_1^2 + x_2^3$

$$\nabla f_5(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_5(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 12x_2$

$\Rightarrow f_5$ n'est ni convexe ni concave.

Δ_2 peut être positif ou negative ou nul pour $x_2 \in \mathbb{R}$

$*$ $f_6(x) = x_1 x_2$

$$\nabla f_6(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f_6(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_6(x) \text{ est indefinie}$$

donc $\Rightarrow f_6$ n'est concave ni convexe.

$*$ $f_7(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1^4$

$$\nabla f_7(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 4x_1^3 \\ 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_7(x) = \begin{bmatrix} 2 + 12x_1^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 + 12x_1^2 > 0 \ \forall x_1$

$\Delta_2 = 2(2 + 12x_1^2) - 1$

$= 3 + 24x_1^2 > 0 \ \forall x_1$

$\nabla^2 f_7(x)$ est définie positive $> 0 \ \forall x$.

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow f_7(x)$ est strictement convexe.

$* f_8(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3$

$$\nabla f_8(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_8(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0 \qquad \Delta_2 = 3$

$\Delta_3 = 2(2\times 2 - (-1)(-1)) + (-1)(-1(2) - (-1)(-1)) + (-1)(-1\times(-1) - (-1)(2))$

$= 6 - 3 - 3 = 0$

$\nabla^2 f$ est semi définie positive $\forall x$

$\Rightarrow f_8$ est convexe.

exo 5 : Trouver analytiquement les minima et les maxima :

$* f_1(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + 1/6\, x_2^3$

$$\nabla f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x_2 \end{bmatrix}$$

$\nabla_1 f_1(x) = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 1/2\, x_2^2 = 0 \end{cases}$$

on trouve 2 pts critiques

$2x_1 = x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1/2\, x_2}$

$-\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 = 0$

$x_2 \left(\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\boxed{x_2 = 0}$ ou $\frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} x_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

pour : $\boxed{x_2 = 0}$: $\boxed{x_2 = 1}$

$\boxed{x_1 = 0}$ $\qquad \boxed{x_1 = 1/2}$

$\Rightarrow$ 2 points critiques :

$(0, 0) \quad (\frac{1}{2}, 1)$

$$\nabla^2 f_1(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_2$$

$\Delta_1 = 2, \ \Delta_2 = -1$

Scanned by CamScanner

$\nabla^2 f_1(0,0)$ est indéfinie donc $pt_1(0,0)$ est un point selle.

$$\nabla^2 f_1(+1/2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_1(-1/2, 1) \text{ est définit positive}$$

pt_2 est un minimum local

$\text{et } \min(f_1(x)) = f_1(1/2, 1)$

* $f_2(x) = x_1^2 + x_2^3 - 2x_1 x_2 - x_2$

-- calcul de pts critiques :

$$\nabla f_2(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 3x_2^2 - 2x_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on trouve 2 pts critiques

$pt_1(-1/3, -1/3)$ $\quad pt_2(1,1)$

$$\nabla^2 f_2(x) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_2(-1/3, -1/3) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = -8 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_2(-1/3, -1/3) \text{ est indéfinie}$$

$\Rightarrow (-1/3, -1/3)$ est point selle

$$\nabla^2 f_2(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 8 > 0 \Rightarrow \nabla^2 f_2(1,1) > 0$

$\Rightarrow (1,1)$ est un pt de minimum local

$\text{Min}(f_2(x)) = f_2(1,1) = -1$

* $f_3(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

$f_3'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$

$x(12x^2 - 48x + 36) = 0$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 3$

$f_3''(x) = 36x^2 - 96x + 36$

$f_3''(0) = 36 > 0$

0 est un pt de min local

$f_3''(1) = -24 < 0$

1 est un pt de max local

$f_3''(3) = 72 > 0$

3 est un pt de min local.

* $f_4(x) = x^3$

$f_4'(x) = 3x^2 = 0$

$x = 0$

$f_4''(x) = 6x$ $\quad f_4$ admet un

$f_4''(0) = 0 \Rightarrow$ pt d'inflexion $x = 0$

Scanned by CamScanner

* $f_5(x) = x_1^2 - x_2^2$

$$\nabla f_5(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

point critique $(0,0)$

$$\nabla^2 f_5(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = -4 < 0$

$\nabla^2 f_5(0,0) = \nabla^2 f_5(x)$

$\nabla^2 f_5(0,0)$ est indéfinie

donc $(0,0)$ est point selle.

* $f_6(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 2x_2 + 10$

$$\nabla f_6(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 1 \\ -10x_2 + 3x_1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les points critiques $\left(\frac{-4}{11}, \frac{1}{11}\right)$

$$\nabla^2 f_6(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f_6(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 11 > 0 \end{array}\right\}$ $\nabla^2 f_6\left(\frac{-4}{11}, \frac{1}{11}\right)$ est définie negative

$(-4/11, 1/11)$ est un pt de max local

et $\max(f_6(x)) = f_6\left(\frac{-4}{11}, \frac{1}{11}\right)$

31.10.2017

exo 6. :

* $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow (0,0)$ est le pt critique

$$\nabla^2 f_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f_1(0,0) = \nabla^2 f_1(x_1, x_2)$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_1(0,0) > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ est un pt de minimum local f_1 est strictement convexe $\Rightarrow (0,0)$ est pt de minimum global et unique

$\mathrm{Min}(f_1(x)) = f_1(0,0) = 0$

* $f_2(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3$

$$\nabla f_2(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -10x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (0,0)$ est le pt critique

$$\nabla^2 f_2(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$_2(0,0) = \nabla^2 f_2(x)$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 20 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2 f_2(0,0) < 0$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ est 1 pt de maximum local.

$\nabla^2 f_2(x) < 0 \ \forall x \Rightarrow f_2$ est strictement concave

$\Rightarrow (0,0)$ est u pt de maximum local et unique.

$\text{Max}(f_2(x)) = f_2(0,0) = 3$.

* $f_3(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 + 6x_2$

$$\nabla f_3(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 3x_2 - 2 \\ 10x_2 - 3x_1 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le pt critique est $\left(\frac{2}{31}, -\frac{18}{31}\right)$ est pt de minimum global et unique.

$\nabla^2 f_3(x) > 0 \Rightarrow f_3$ est strictement convexe

$\Rightarrow \left(\frac{2}{31}, \frac{-18}{31}\right)$ est un pt de Mini global et unique

$\text{Min}(f_3) = f_3\left(\frac{2}{31}, \frac{-18}{31}\right) = ?$

* $f_4(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 2x_1 + 1$

$$\nabla f_3(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le pt critique $(1,1,0)$

$$\nabla^2 f_4(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(1,1,0) = \nabla^2 f_4(x)$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \\ \Delta_3 = 8 > 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\nabla^2 f_4(1,1,0) \\ (1,1,0) \text{ est } 1\end{array}$

pt de min local

$\nabla^2 f_4(x) > 0$, $\forall x$, f_4 est strictement convexe

$\Rightarrow (1,1,0)$ est point de min global et unique.

$\text{Min}(f_4) = f_4(1,1,0) = -1$

Scanned by CamScanner

TD n : 2

exo 1 :

$f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2)$

1) - Determiner les extremas :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 - 6 \\ 8x_2 - 2x_1 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P(1,1)$ est le pt critique

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \nabla^2 f(0,0)$

$\Delta_1 = 8 > 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x) > 0$

$\Delta_2 = 60 > 0$

donc : $P(1,1)$ pt de minimum local.

2) - Determiner les minima :

Initialisation :

$$x^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Algorithme du Gradient à pas optimal :

Rappel :

algorithme du gradient à pas optimal.

x^0 : point de depart.

$k = 0, 1, 2, \dots$

⊕ calcul de α^k qui realise le min de $f(x^k - \alpha^k \nabla f(x^k))$

⊕ $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$.

critère d'arret :

$\| \nabla f(x^k) \| < \varepsilon \; , \; \varepsilon = 10^{-2}$

$\| \nabla f(x^0) \| = \sqrt{14^2 + 4^2}$.

$= 14{,}5602 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calculer $x^1 \Rightarrow$ etape 1

$k = 0$

* etape 1 : $k = 0$

calcul de $\alpha^0 \longrightarrow \min\limits_{\alpha^0} f(x^0 - \alpha^0 \nabla f(x^0))$

$$x^0 - \alpha^0 \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \alpha^0 \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 14\alpha^0 \\ 2 - 4\alpha^0 \end{bmatrix}$$

$f(x^0 - \alpha^0 \nabla f(x^0)) = 4\left((3 - 14\alpha^0)^2 + (2 - 4\alpha^0)^2\right) - 2(3 - 14\alpha^0)(2 - 4\alpha^0) - 6(5 - 18\alpha^0) = 736\alpha^2 - 212\alpha + 10$

$\boxed{\alpha^0 = 0{,}144} \Leftarrow \dfrac{\partial f(x^0 - \alpha^0 \nabla f(x^0))}{\partial \alpha_0} = 0$

Scanned by CamScanner

$f(x^1 - \alpha^1 \nabla f(x^1)) = 57{,}3891\,{\alpha^1}^2 - 12{,}6764\,\alpha^1 - 5{,}2663$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}(x^1 - \alpha^1 \nabla f(x^1)) = 114{,}7781\,\alpha^1 - 12{,}6764 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^1 = 0{,}1104}$

$x^2 = x^1 - \alpha^1 \nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 1{,}0918 \\ 1{,}046 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} 0{,}642 \\ 0{,}1844 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^2)\| = 0{,}668 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calcul de x^3

* etape 3 : $k = 2$

07/11/2017

$\alpha^2 \xrightarrow{\text{résoudre}} \min_{\alpha^2} f(x^2 - \alpha \nabla f(x^2))$

$x^2 - \alpha^2 \nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} 1{,}0918 - 0{,}642\alpha^2 \\ 1{,}046 - 0{,}1844\alpha^2 \end{bmatrix}$

$f(x^2 - \alpha^2 \nabla f(x^2)) = 1{,}5479\,{\alpha^2}^2 - 0{,}4464\,\alpha^2 - 5{,}9663$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}(x^2 - \alpha^2 \nabla f(x^2)) = 3{,}0958\,\alpha^2 - 0{,}4464 = 0$

$\boxed{\alpha^2 =}$

$x^3 = x^2 - \alpha^2 \nabla f(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}0194 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x^3) = \begin{bmatrix} -0{,}0388 \\ 0{,}1583 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^3)\| = 0{,}1601 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calcul de x^4.

* etape 4 : $k = 3$

$\boxed{\alpha^3 = 0{,}1104}$

$x^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla f(x^4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \|\nabla f(x^4)\| = 0 < 10^{-2}$

$\Rightarrow x^4$ est le pt de min local de f. $\min(f) = f(1,1) = ?$

Algorithme du gradient conjugué :

$x^0 =$ point de depart.

$d^0 = -\nabla f(x^0)$.

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$\alpha^k \longrightarrow \min_{\alpha^k} f(x^k + \alpha^k d^k)$

$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$

$\beta^k = \|\nabla f(x^{k+1})\|^2 / \|\nabla f(x^k)\|^2$

Scanned by CamScanner

$\|\nabla f(x^k)\|^2$

$d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + B^k d^k$

Initialisation :

$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\|\nabla f(x^0)\| = 14,5602 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calcul de x^1

$d^0 = -\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$

etape 1 : $k=0$

$\alpha^0 \longrightarrow \min_{\alpha} f(x^0 + \alpha^0 d^0)$

$x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha^0 \begin{bmatrix} -14 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 14\alpha^0 \\ 2 - 4\alpha^0 \end{bmatrix}$

$f(x^0 + \alpha^0 d^0) = 736\,\alpha^{0\,2} - 212\alpha^0 + 10$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha^0}(x^0 + \alpha^0 d^0) = 1472\alpha^0 - 212 = 0$

$\alpha^0 = 0,144$

$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{0\,2}} > 0 \Rightarrow \alpha^0 = 0,144$

$x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 0,984 \\ 1,424 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} -0,976 \\ 3,424 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^1)\| = 3,5604 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calcul de x^2.

$B^0 = \frac{\|\nabla f(x^1)\|^2}{\|\nabla f(x^0)\|^2} = 0,0598$

$d^1 = -\nabla f(x^1) + B^0 d^0 = \begin{bmatrix} 0,1388 \\ -3,6632 \end{bmatrix}$

etape 2 : $k=1$

$\alpha^1 \xrightarrow{\text{resoluts}} \min_{\hat{\alpha}} f(x^1 + \alpha^1 d^1)$

$x^1 + \alpha^1 d^1 = \begin{bmatrix} 0,984 + 0,1388\alpha^1 \\ 1,424 - 3,6632\alpha^1 \end{bmatrix}$

$f(x^1 + \alpha^1 d^1) = 54,7701\,\hat{\alpha}^2 - 12,6783\hat{\alpha}$
$- 5,2663$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} = 109,5402\alpha^1 - 12,6733 = 0$

$\alpha^1 = 0,1157$

$x^2 = x^1 + \alpha^1 d^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^2)\| = 0 < 10^{-2} \Rightarrow x^2$ est le point de minimum local.

methode de Newton :

x^0 = pt de depart

$k = 0, 1, 2 \ldots$

$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \nabla f(x^k)$

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \left[\nabla^2 f(x)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{30} & 1/30 \\ 1/30 & \frac{4}{30} \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

Initialisation :

$x^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\|\nabla f(x^0)\| = 14{,}5602 > 10^{-2}$

$\Rightarrow$ calcul de x^1 :

étape 1 : $k = 0$

$x^1 = x^0 - \left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1} \nabla f(x^0)$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/30 & 1/30 \\ 1/30 & 4/30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\nabla f(x^1)\| = 0 < 10^{-2} \Rightarrow x^1 = (x_1^1, x_1^1)$

$= (1,1)$ est le pt de minimum local. $\text{Min}(f) = f(1,1) = ?$

<u>ex 02 :</u>

f

$$\begin{cases} \text{Max } (x_1 + 3x_2) \\ \text{s.c :} \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(5, 0)
(0, 2)

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ $\quad x_2 = 0$, $x_1 = 5$

① $2x_1 + 5x_2 = 10 \Rightarrow (0,2)\ (5,0)$

$x_1 = 0$ $x_2 = 3$

② $3x_1 + 4x_2 = 12 \Rightarrow (0,3)\ (4,0)$

$x_2 = 0$
$x_1 = 4$

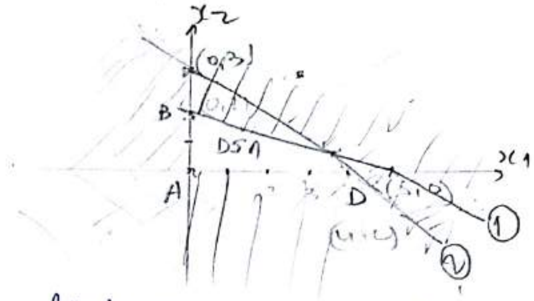
(0,3) (4,0)

A(0,0)

B(0,2)

C $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{20}{7}, \frac{6}{7}\right)$

D = (4,0)



$f(A) = 0$ $\quad$ $\text{Max}(f) = f(B) = 6$

$f(B) = 6$ $\quad$ $\Rightarrow$ B est le pt max

$f(C) = \frac{38}{7}$ $\quad$ $\text{Min}(f) = f(A) = 0$

$f(D) = 4$

<u>14 - 11 - 2017</u>

$$\begin{cases} \text{Min } (x_1 - x_2) \\ \text{s.c :} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

① : $2x_1 + 3x_2 = 12$ $\quad$ (0,4) (6,0)

② $3x_1 + x_2 = 9$ $\quad$ (0,9) (3,0)

③ $x_1 + x_2 = 2$ $\quad$ (0,2) (2,0)

A (0,2) $\quad$ B (0,4) $\quad$ C $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$

$\Rightarrow C\left(\frac{15}{7}\ \frac{18}{7}\right)$

A

Scanned by CamScanner

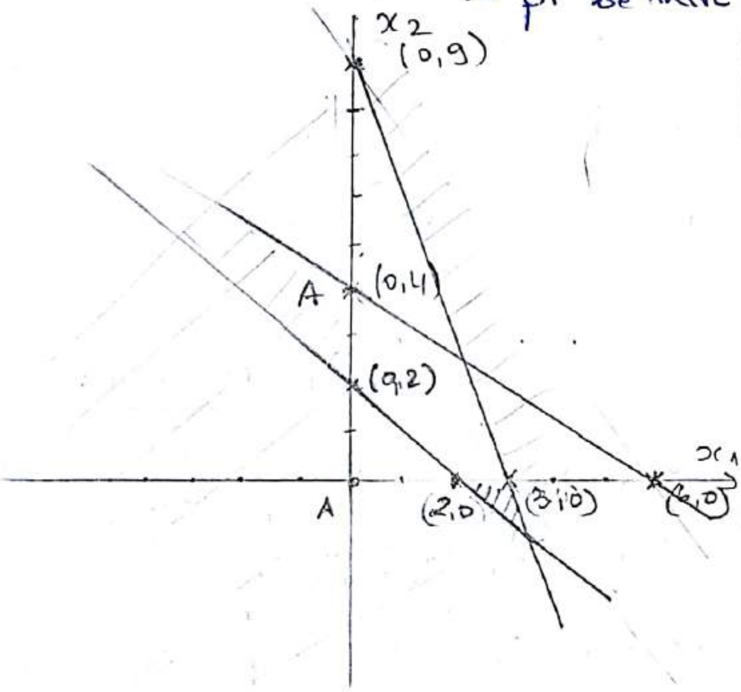
$B(3,0) \quad E(2,0)$

$f(A) = -2 \quad f(B) = -4$

$f(C) = -\frac{3}{7} \quad f(D) = 3 \quad f(E) = 2$

$Min(f) = f(B) = -4$

$\Rightarrow x = B$: est le le pt de min

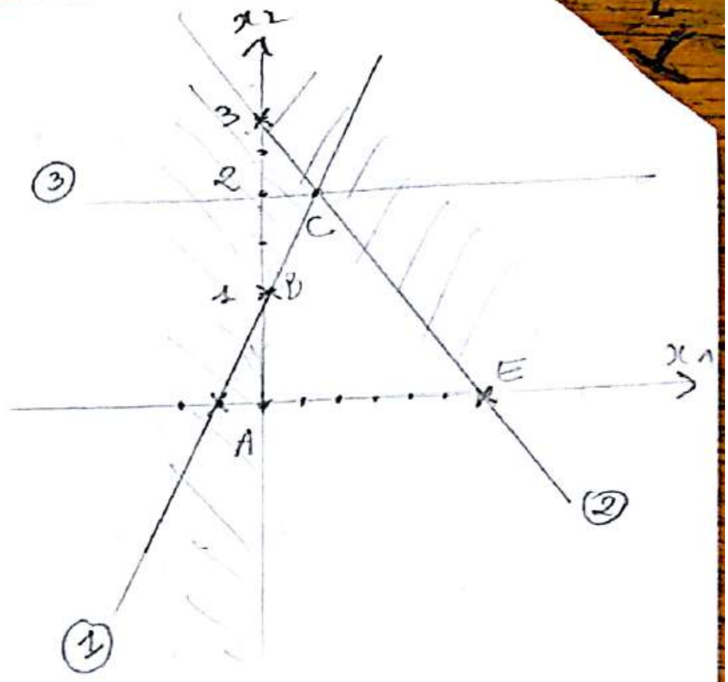


$$\begin{cases} Max(x_1 + x_2) \\ s.c: \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

①: $-2x_1 + x_2 = 1$ $\quad (0,1)\ (-\frac{1}{2},0)$

②: $x_1 + x_2 = 3$ $\quad (0,3)\ (3,0)$

③: $x_2 = 2$ $\quad (0,2)$



Scanned by CamScanner

exo 3:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array}$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$\frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$3x_1 = \frac{2 - 4x_2}{3}$

$\frac{4 - 8x_2}{3} + \frac{9x_2}{3} = 1$

$4 + x_2 = 3$

$x_2 = -1$

$(2, -1, 0)$

$n = 3 = x_1, x_2, x_3$

$m = 2$ (nbr d'eqt)

$n - m = 1$

cela signifie qu'il faut avoir 1 variable nulle (1 variable hors base) dans chaque solution de base et 2 variables de base telque $\det(A_B \neq 0)$

cas 1: x_1 et x_2 sont les variables de base

$$A_{B_1} = [A_1 \; A_2] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_{B_1}) = 1 \neq 0$$

x_3 : variable hors base

$\Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

La solution de base est:

$$x_{B_1} = (2 \;\; -1 \;\; 0).$$

cas 2: x_1 et x_3 sont les variables de bases.

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A_{B_2}) = -2 \neq 0$$

La solution de base est :

$$\left(\tfrac{1}{2} \;\; 0 \;\; \tfrac{1}{2}\right)$$

x_2 : variable hors base $= 0$

cas 3 : x_2 et x_3 sont les variables de base.

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A_{B_3}) = -3 \neq 0$$

x_1 : variable hors base $= 0$.

La solution de base est $\left(0 \;\; \tfrac{1}{3} \;\; \tfrac{2}{3}\right)$

exo 4:

$$\text{Max}(2x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

forme canonique: en ajoutant les variables d'ecart : x_3, x_4 et x_5

le problème (P) devient :

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} \max(2x_1 + x_2) \\ s.c: \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,5}$

soit : $x_j / j \in I, I = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}$

$I_B = \{x_3\ x_4\ x_5\} = \{3\ 4\ 5\}$

$I_{Hors\ Base} = \{x_1\ x_2\} = \{1\ 2\}$
$= 0$

La solution de base de départ :

$x = (0\ 0\ 4\ 5\ 6)$

$\Rightarrow$ tableau simplexe

$E_j = C^T B A^{-1} B A_j - c_j$

$C^T B = (C_3 C_4 C_5)$

$= (0, 0, 0)$

$E_1 = C_B^T A_1 - C_1 = [0\ 0\ 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2$

$= -2$

Vecteur de base	C^T	2	1	0	0	0	
	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_j
L3 A_3	4	1	1	1	0	0	4/1
L4 A_4	5	-2	3	0	1	0	/
L5 A_5	6	2	-3	0	0	1	6/2 →
	E_j	-2 ↑	-1	0	0	0	
L3' A_3	1	0	5/2	1	0	-1/2	2/5 →
L4' A_4	11	0	0	0	1	1	—
L1 A_1	3	1	-3/2	0	0	1/2	—

21. 11. 2017

α = pivot = 2

$L1 = \frac{L5}{\alpha} = \frac{L5}{2}$

$L3' = L3 - L1$

$L4' = L4 + 2L1$

	E_j	0	-4 ↑	0	0	1	
L2 A_2	2/5	0	1	2/5	0	-1/5	
L4'' A_4	11	0	0	0	1	1	
L1' A_1	13/5	1	0	3/5	0	1/5	
	E_j	0	0	8/5	0	1/5	

$C^T B = (L3 \cdot L4\ L_1) = (0\ 0\ 2)$

$L2 = \frac{L3'}{\alpha} = \frac{L3}{5} = \frac{2}{5} L3'$

$L4'' = L4' + 0L2$

$L1' = L1 + 3/2\, L2$

Scanned by CamScanner

$_B = (L_2\ L_4\ L_1) = (1\ 0\ 2)$

exo 5

$x^* = (18/5\ \ 2/5\ \ 0\ 11\ 0)$

$Max(f) = f(x^*) =$

$$(P)\quad \begin{cases} Max(x_1 - 3x_2 - 2x_3) \\ s.c: \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme canonique : en ajoutant les variables d'écarts →

$$(P1)\quad \begin{cases} Max(x_1 - 3x_2 - 2x_3) \\ s.c: \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_3 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

$I_B = \{4, 5, 6\}$ $I_H = \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow x = (0\ 0\ 0\ -3\ 6\ 2)$ est une solution de base qui n'est pas réalisable car $x_4 = -3 < 0$.

on ajoute une variable artificielle dans la contrainte qui a donné une variable de base négative, la 1ère contrainte $\Rightarrow$ phase 1.

phase 1 : Resoudre $Max(-x_7)$

s.c :

$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 3$

$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6$

$x_3 + x_6 = 2$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,7}$

$I_B = \{7\ 5\ 6\}$ $I_H = \{1\ 2\ 3\ 4\}$

$\Rightarrow x = (0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 2\ 3)$ est la solution de base de départ de P1

- tableau de simplexe :

Vecteurs de base	C^T	0	0	0	0	0	0	-1	
	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ_j
L_7 A_7	3	2	-1	1	-1	0	0	1	3/2 ⇒
L_5 A_5	6	4	2	1	0	1	0	0	6/4
L_6 A_6	2	0	0	1	0	0	1	0	-
	E_j	-2 ↑	1	-1	1	0	0	0	
L_1 A_1	3/2	1	-1/2	1/2	-1/2	0	0	1/2	
L'_5 A_5	0	0	4	-1	2	1	0	-2	
L'_6 A_6	2	0	0	1	0	0	1	0	
	E_j	0	0	0	0	0	0	1	

$L_1 = \frac{L_7}{2}$ $L'_5 = L_5 - 4L_1$

$L'_6 = L_6$

$E_j \geq 0 \quad j = \overline{1,7}$

$\Rightarrow x^* = (3/2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0)$

Scanned by CamScanner

est la solution optimale de (P1) comme la variable artificielle $x_7 = 0$, on passe à la 2ème phase, et on prend $\overset{*}{x} = (3/2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2)$ la solution de base de départ de (P)

phase 2:

$$Max(x_1 - 3x_2 - 2x_3)$$

avec: $x = (3/2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2)$ comme solution de base

	C^T	1	-3	-2	0	0	0	
	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ_j
$L_1 A_1$	3/2	1	-1/2	1/2	-1/2	0	0	/
$L_5 A_5$	0	0	4	-1	2	1	0	0 →
$L_6 A_6$	2	0	0	1	0	0	1	—
	E_j	0	1/2	5/2	-1/2 ↑	0	0	
$L'_1 A_1$	3/2	1	1/2	1/4	0	1/4	0	
$L_4 A_4$	0	0	2	-1/2	1	1/2	0	
$L'_6 A_6$	2	0	0	1	0	0	1	
	E_j	0	7/2	9/4	0	1/4	0	

$L_4 = \frac{L_5}{2}$

$L'_1 = L_1 + 1/2 L_4$

$L'_6 = L_6$

$C_B^T = (1\ 0\ 0)$

$E_j \geq 0\ j = \overline{1,6} \Rightarrow \overset{*}{x} = (3/2\ 0\ 0$ ...

est la solution optimale de problème (P)

$$Max(f) = f(\overset{*}{x}) = 3/2$$

28.11.2017

Primal:

$$Max(x_1 - 3x_2 - 2x_3)$$

s.c:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 & y_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 & y_2 \\ x_3 \leq 2 & y_3 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

Dual:

$$Min(b^T y) = min\left([3\ 6\ 2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$Min(3y_1 + 6y_2 + 2y_3)$$

s.c:

$2y_1 + 4y_2 \geq 1$

$-y_1 + 2y_2 \geq -3$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq -2$

$y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$

Scanned by CamScanner

exo6 :

$$\text{Min } (2x_1+x_2)$$

s.c:

$3x_1+x_2 \geq 3$

$4x_1+3x_2 \geq 6$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

-transformer le probleme :

$$\text{Max } (-2x_1-x_2)$$

s.c :

$3x_1+x_2 \geq 3$

$4x_1+3x_2 \geq 6$

$x_1+2x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Forme canonique: on ajoutant les variables d'ecarts $x_3 \cdot x_4$ et x_5 on obtient:

$$\text{Max } (-2x_1-x_2)$$

s.c :

$$(P)\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=3 \\ 4x_1+3x_2-x_4=6 \\ x_1+2x_2+x_5=3 \\ x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,5} \end{cases}$$

$I_B=\{3\ 4\ 5\}$ $I_H=\{1\ 2\}$

$\Rightarrow x=(0\ 0\ -3\ -6\ 3)$ est une solution de base qui n'est pas realisable car x_3 et x_4 sont negatives on ajoute les variables artificielles dans les contraintes qui ont donné des variables de base negatives (1 et 2) $\Rightarrow$ phase 1

phase 1 : Resoudre.

$$(P_1)\begin{cases} \text{Max } (-x_6-x_7) \\ \text{s.c: } 3x_1+x_2-x_3+x_6=3 \\ 4x_1+3x_2-x_4+x_7=6 \\ x_1+2x_2+x_5=3 \\ x_j \geq 0 \quad j=\overline{1,7} \end{cases}$$

$I_B=\{6\ 7\ 5\}$ $I_H=\{1\ 2\ 3\ 4\}$

$\Rightarrow x=(0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 6)$ est la solution de base de depart.

tableau de simplexe:

Scanned by CamScanner

	C^T	0	0	0	0	0	-1	-1	
	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ_j
$L_6\ A_6$	3	3	1	-1	0	0	1	0	1 →
$L_7\ A_7$	6	4	3	0	-1	0	0	1	3/2
$L_5\ A_5$	3	1	2	0	0	1	0	0	3
	E_j	-7 ↑	-4	1	1	0	0	0	θ_j
$L_1\ A_1$	1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	3
$L_7'\ A_7$	2	0	5/3	4/3	-1	0	-4/3	1	6/5 →
$L_5'\ A_5$	2	0	5/3	1/3	0	1	-1/3	0	6/5
	E_j	0	-5/3 ↑	-4/3	1	0	7/3	0	θ_j
$L_1'\ A_1$	3/5	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	
$L_2\ A_2$	6/5	0	1	4/5	-3/5	0	-4/5	3/5	
$L_5''\ A_5$	0	0	0	-1	1	1	1	-1	
	E_j	0	0	0	0	0	1	1	

$$C^T_B = \overset{A_6\ A_7\ A_5}{(-1\ -1\ 0)}$$

$L_1 = \frac{L_6}{3}$ $\quad L_7' = L_7 - 4L_1$

$L_5' = L_5 - L_1$

$$C^T_B = (0\ -1\ 0)$$

$L_2 = L_7' \frac{3}{5}$ $\quad L_1' = L_1 - \frac{1}{3} L_2$

$L_5'' = L_5' - \frac{5}{3} L_2$

$$C^T_B = (0\ 0\ 0)$$

$E_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}$

$\Rightarrow x^* = (3/5\ \ 6/5\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ est la solution optimale de (P1)

Comme les variables artificielles x_6 et x_7 sont nulles, on passe à la 2ème phase, où on va résoudre (P) en prenant $x^* = \left(\frac{3}{5}\ \frac{6}{5}\ 0\ 0\ 0\right)$ comme solution de base de départ.

<u>Phase 2:</u>

	CT	-2	-1	0	0	0	
	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	θ_j
A_1	3/5	1	0	-3/5	1/5	0	
A_2	6/5	0	1	4/5	-3/5	0	
A_5	0	0	0	-1	1	1	
	E_j	0	0	2/5	1/5	0	

$$C^T_B = (-2\ -1\ 0)$$

$E_j \geq 0$ $j = \overline{1,5}$

$\Rightarrow x^* = (3/5\ \ 6/5\ \ 0\ 0\ 0)$ est la solution optimale (pt de max) de (P).

$Min(f) = f(x^*) = \frac{12}{5}$

$Max(-f) = -f(x^*) = \frac{-12}{5}$

$$\boxed{Min(f) = -max(-f)}$$

x^* est un point de max de f et en même temps est un pt de min de f.

Scanned by CamScanner

Primal :

$$\begin{cases} \text{Min } 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c :} \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 & y_1 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & y_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 & y_3 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dual :

$$\text{Max}(b^T y) = \text{Max}[3\ 6\ 3]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Max}(3y_1 + 6y_2 + 3y_3)$$

s.c :

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \leq .$$

05/12/2017

Exo 7 :

$$\text{Max}(2x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

ce problème a déjà resolu dans l'exo 4 :

$$x^* = (18/5 \ \ 2/5) \quad \text{Max}(f) = 38/5$$

Dual :

$$\text{Min}(\overbrace{4y_1 + 5y_2 + 6}^{= w})$$

s.c :

$$y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 2$$

$$y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$$

par le théorème des écarts complémentaires :

$$\overset{\neq 0}{x_1^*} \cdot (\overbrace{y_1 - 2y_2 + 2y_3}^{= 0})$$

$$x_2^* \cdot (\underbrace{y_1 - 3y_2 - 1}_{0}) = 0$$

$$y_1(x_1 + x_2 - 4) = 0$$

$$y_2(-2x_1 + 3x_2 - 5) = 0$$

$$y_3(2x_1 - 3x_2 - 6) = 0$$

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2 = 0 \\ y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 + 2y_3 = 2 \\ y_1 - 3y_3 = 1 \\ \Rightarrow y_3 = 1/5 \\ y_1 = 2/5 \end{array}$$

$$\Rightarrow y^* = (8/5 \ \ 0 \ \ 1/5)$$

Scanned by CamScanner

$Min(w) = w(y^*) = \frac{38}{5} = Max(f) \Rightarrow y^*$ est solution optimale (pt de min du problème

TD n° 03

EXO 1 :

$Max(-2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2)$

s-c :

$g_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$

$g_2(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

La fonction de Lagrange :

$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\mathcal{L}(x,\lambda) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + \lambda_2(4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2)$

1/. Calcul des points critiques :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{x_1} = -4x_1 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{x_2} = -2x_2 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{x_3} = -6x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right. = \nabla x\mathcal{L}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \end{array}\right. = \nabla_\lambda \mathcal{L}$$

$\nabla \mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla x \mathcal{L}(x,\lambda) \\ \nabla \lambda \mathcal{L}(x,\lambda) \end{bmatrix}$

La solution à ce système est :

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(\frac{5}{27}\ \frac{10}{27}\ \frac{2}{27}\ \frac{4}{27}\ \frac{4}{27}\right)$

$\Rightarrow$ On a un seul point critique

2/. $y^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) y < 0$

$\forall y \neq 0 \quad Jg(x^*) y = 0$

$\nabla^2 x \mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*) = \nabla^2 x \mathcal{L}(x,\lambda)$

$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$

$Jg(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$Jg(x) y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$

Scanned by CamScanner

$y_1+2y_2+y_3=0$

$\begin{cases} 4y_1+3y_2+2y_3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1+2y_2=-y_3 \\ 2y_1+3/2\, y_2=-y_3 \end{cases}$

$y_1+2y_2=2y_1+3/2\, y_2$

$\Rightarrow \boxed{y_2=2y_1}$

$\boxed{y_3=-5y_1}$ $\Rightarrow y=\begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 \\ -5y_1 \end{bmatrix}$

$y^T \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)y=$

$=\begin{bmatrix} y_1 & 2y_1 & -5y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$=-4y_1^2-8y_1^2-150y_1^2<0$

$\Rightarrow x^*=\left(5/27 \;\; 19/27 \;\; 2/27\right)$ est un point de max.

$\max(f)=f(x^*)=-92222$

12.12.2017

exo2:

$\min(2x_1^2-8x_1+x_2^2-2x_2)$

s.c:

$h_1(x)=x_1-x_2\geq 0$

$h_2(x)=x_1+x_2-4\leq 0$

$\Rightarrow \min(2x_1^2-8x_1+x_2^2-2x_2)$

s.c:

$h_1(x)=x_2-x_1\leq 0$

$h_2(x)=x_1+x_2-4\leq 0$

methode de Kuhn Tucker:

la fct de lagrange:

$\mathcal{L}(x,\mu)=f(x)+\sum_{j=1}^{2}\mu_j h_j(x)$

$\mathcal{L}(x,\mu)=2x_1^2-8x_1+x_2^2-2x_2+\mu_1\underbrace{(x_2-x_1)}_{h_1}$

$+\mu_2\underbrace{(x_1+x_2-4)}_{h_2}$

1) calcul de pts critiques:

$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$

$\nabla_x \mathcal{L}(x,\mu)=0$

$\nabla_\mu \mathcal{L}(x,\mu). \begin{cases} h_j(x)\leq 0 & j=\overline{1,2} \\ \mu_j h_j(x)=0 \\ \mu_j\geq 0 & j=\overline{1,2} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}=4x_1-8-\mu_1+\mu_2=0 \text{ --- } (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}=2x_2-2+\mu_1+\mu_2=0 \text{ --- } (2) \\ x_2-x_1\leq 0 \text{ --- } (3) \\ x_1+x_2-4\leq 0 \text{ --- } (4) \\ \mu_1(x_2-x_1)=0 \text{ --- } (5) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} \mu_2(x_1+x_2-4)=0 \quad --- (6) \\ \mu_1 \geq 0 \quad ------ (7) \\ \mu_2 \geq 0 \quad ----- (8) \end{cases}$$

<u>1er cas</u>: $\mu_1 = 0 ; \mu_2 = 0$

h_1 et h_2 sont inactives <0

(1) $\Rightarrow 4x_1 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$

(2) $\Rightarrow 2x_2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

(3) $\Rightarrow x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow -1 < 0$ vérifié

(4) $\Rightarrow x_1 + x_2 - 4 < 0 \Rightarrow -1 < 0$ vérifié

(7) $\Rightarrow \mu_1 = 0$

(8) $\Rightarrow \mu_2 = 0$

Le pt critique :

$x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ) = (2 \quad 1)$ et $\mathring{\mu} = (\mathring{\mu}_1, \mathring{\mu}_2) = (0 \; 0)$

<u>2eme cas</u>: $\mu_1 \neq 0 ; \mu_2 \neq 0$

(h_1 et h_2 sont actives $=0$)

(1) $\Rightarrow 4x_1 - 8 - \mu_1 + \mu_2 = 0$
(2) $\Rightarrow 2x_2 - 2 + \mu_1 + \mu_2 = 0$
$\Big\}\ \mu_2 = -1 < 0$ (rejectée)

(3) $\Rightarrow x_2 - x_1 = 0$
(4) $\Rightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0$
$\Big\}\ x_1 = x_2 = 2$

(7) $\Rightarrow \mu_1 > 0$

(8) $\Rightarrow \mu_2 > 0$

<u>3eme cas</u>: $\mu_1 = 0 ; \mu_2 \neq 0$

(h_2 active et h_1 inactive)

(1) $\Rightarrow 4x_1 - 8 + \mu_2 = 0$
(2) $\Rightarrow 2x_2 - 2 + \mu_2 = 0$
(3) $\Rightarrow x_2 - x_1 < 0$
(4) $\Rightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0$

$x_1 = 7/3$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $\mu_2 = -4/3 < 0$

<u>rejectée</u>

(7) $\Rightarrow \mu_1 = 0$

(8) $\Rightarrow \mu_2 > 0$

<u>4eme cas</u>: $\mu_1 \neq 0 ; \mu_2 = 0$

(h_1 active, h_2 inactive)

(1) $\Rightarrow 4x_1 - 8 + \mu_1 = 0$
(2) $\Rightarrow 2x_2 - 2 + \mu_1 = 0$
(3) $\Rightarrow x_2 - x_1 = 0$

$x_1 = x_2 = 5/3$

(4) $\Rightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0$

(7) $\Rightarrow \mu_1 > 0$

(8) $\Rightarrow \mu_2 = 0$

$\Rightarrow$ on a un seul pt critique :

$x^\circ = (2 \quad 1) \quad \mathring{\mu} = (0 \quad 0)$

2) on vérifie la nature du pt critique :

$y^T \nabla^2_x \mathcal{L}(x^\circ, \mathring{\mu})\, y > 0 \quad \forall y \neq 0 /$ $\cancel{y^T \nabla h_j(x^\circ) = 0}$

on a pas de h active

on vérifie

$y^T \nabla^2_x \mathcal{L}(x^\circ, \mathring{\mu})\, y > 0$

Scanned by CamScanner

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\mu) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^0,\mu^0) = \nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\mu)$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 8 > 0 \Rightarrow \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^0,\mu^0) > 0$

$\Rightarrow x^0$ est un pt de minimum local $Min(f) = f(x^0) = -9$

<u>exo 3</u> :

$$Min\ ((x_1-1)^2 + x_2 - 2)$$

s.c :

$g(x) = x_2 - x_1 - 1 = 0$

$h(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$

La fct de Lagrange :

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum \lambda_i g_i + \sum \mu_j h_j$$

$$= f(x) + \lambda g(x) + \mu h(x)$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = (x_1-1)^2 + x_2 - 2 + \lambda(x_2 - x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 4)$$

1/ pt critique :

$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = 0$

$g_i(x) = 0 \qquad i = 1..m$

$h_j(x) \leq 0 \qquad i = 1, .. p$

$\mu_j h_j(x) = 0$

$\mu_j \geq 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda + \mu = 0$ --- ①

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 + \lambda + \mu = 0$ --- ②

$x_2 - x_1 - 1 = 0$ --- ③

$x_1 + x_2 - 4 \leq 0$ --- ④

$\mu(x_1 + x_2 - 4) = 0$ --- ⑤

$\mu \geq 0$ --- ⑥

⑤ $\Rightarrow \mu = 0$ ou $x_1 + x_2 - 4 = 0$ (h active)

<u>cas 1</u> : $\mu = 0$ (h inactive)

① $2(x_1 - 1) - \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1/2}$

② $1 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

③ $x_2 - x_1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3/2}$

④ $x_1 + x_2 - 4 < 0$

⑥ $\mu = 0$

le 1er pt critique :

$$\boxed{x^1 = (1/2, 3/2) \quad \hat{\lambda} = -1 \quad \hat{\mu} = 0}$$

<u>cas 2</u> : $\mu \neq 0$ h active $(=0)$

①: $2(x_1 - 1) - \lambda + \mu = 0$
②: $1 + \lambda + \mu = 0$
$\}$ $\lambda = 1 \quad \mu = -2 < 0$ rejeté

③: $x_2 - x_1 - 1 = 0$
④: $x_1 + x_2 - 4 = 0$
$\}$ $x_1 = 3/2 \quad x_2 = 5/2$

⑥: $\mu > 0$

Scanned by CamScanner

Donc on a un seul point critique

$\boxed{x^1 = (1/2 \; ; \; 3/2)}$ $\quad \lambda^1 = -1 \quad \mu^1 = 0$

2°/: $y^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^1, \lambda^1, \mu^1) y > 0 \quad \forall y \neq 0$

$$\begin{cases} y^T h_{ij}(x^1) = 0 \\ Jg(x) y = 0 \end{cases}$$

$Jg(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\nabla^2_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\nabla^2_x \mathcal{L}(x^1, \lambda^1, \mu^1) = \nabla^2_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$

$Jg(x^1) y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_2} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} y_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 2y_1^2 > 0$

$\Rightarrow x^1 = (1/2 \;\; 3/2)$ est un minimum local

$Min(f) = f(x^1) = ?$

14-12-2017
(exp cours)

exo 4:

$Min(x_1^2 + x_2^2)$ $\qquad \varepsilon_r = 10^{-2}$

s.c:

$2x_1 + x_2 + 4 = 0$

La fct de Lagrange :

$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 + 4)$

soit :

$X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix}$

$X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\nabla \mathcal{L}(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2\lambda \\ 2x_2 + \lambda \\ 2x_1 + x_2 + 4 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 \mathcal{L}(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(\nabla^2 \mathcal{L}(X))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & \frac{-2}{10} & 2/5 \\ -2/10 & 2/5 & 2/10 \\ 2/5 & 2/10 & -2/5 \end{bmatrix}$

Initialisation :

$\nabla \mathcal{L}(X^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\|\nabla \mathcal{L}(X^0)\| = 4 > \varepsilon$

calcul de X^1:

etape 1 : $k = 0$

$x^1 = x^0 - (\nabla^2 \mathcal{L}(x^0))^{-1} \nabla \mathcal{L}(x^0)$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 & 2/5 \\ -2/10 & 4/5 & 2/10 \\ 2/5 & 2/10 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \mathcal{L}(x^1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\nabla \mathcal{L}(x^1)\| = 0 < \varepsilon$$

$\overset{*}{X} = X^1 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ est le pt de minimum local

$\text{Min}(f) = f(x^1) = 16/5$

$$x^1 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

19.12.2017

exo 5 :

$\min (x_1 + x_2)$

s.c :

$h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

La fct de Langrange

$\mathcal{L}(x_1, \mu) = f(x) + \mu h(x) =$

$x_1 + x_2 + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

1) point critique :

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 + 2\mu x_1 = 0$ --- (1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 + 2\mu x_2 = 0$ --- (2)

$x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ --- (3)

$\mu(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$ --- (4)

$\mu \geq 0$ --- (5)

(4) $\Rightarrow \mu = 0$ ou $(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$
h active

1er cas :

$\mu = 0$ h inactive

(1) $\rightarrow 1 = 0$ (impossible)

2ème cas :

$\mu \neq 0$ h active.

(1) $\Rightarrow 1 + 2\mu x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1/2\mu}$

(2) $\Rightarrow 1 + 2\mu x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1/2\mu}$

(3) $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(5) $\Rightarrow \mu > 0$

$\Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

le pt critique est $x^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mu^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2°/. $y^T \nabla^2_x \mathcal{L}(x^*, \mu^*) y > 0$

$\forall y \neq 0 / y^T \nabla x(x^*) = 0$

$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$y^T \nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow y_2 = -y_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \end{bmatrix}$

$\nabla^2_x \mathcal{L}(x, \mu) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$y^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \mu^*) y = \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 \end{bmatrix} \times$

$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{2} y_1^2 > 0$

$\Rightarrow x^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le pt de minimum local.

$\text{Min}(f) = f(x^*) = -\sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
Master 1

Année 2017/2018

Optimisation: TD n°1

Ex.#1 Une firme fabrique deux produits P_1 et P_2 à l'aide des matières premières M_1, M_2 et M_3. Le fonctionnement de l'usine est représenté par le tableau suivant:

	P_1	P_2
M_1	2	1
M_2	4	2
M_3	0	1

La direction de la firme dispose des matières premières M_1, M_2 et M_3 en quantités respectives 800, 700 et 300. Le profit du à la fabrication d'une unité de P_1 est égal à 5, et celui d'une unité de P_2 est égal à 6. La tâche de la direction est de faire fonctionner cette usine de manière optimale, c'est-à-dire de rendre le profit maximum tout en respectant les contraintes sur les matières premières.
Modéliser ce problème d'optimisation.

Ex.#2 Une compagnie d'alimentation dispose de 2000kg de café Africain, 3000kg de café Brésilien et 500 kg de café Colombien. En utilisant ces trois produits la compagnie procède à des mélanges pour obtenir deux types de café à commercialiser.

Le plan de production est représenté par le tableau suivant :

	Café type 1	Café type 2
Café Africain	0,6	0,4
Café Brésilien	0,3	0,4
Café Colombien	0,1	0,2

Le premier type est vendu à 140 DA le kg et le $2^{\text{ième}}$ à 170 DA le kg.
Modéliser ce problème de maximisation de bénéfice.

Scanned by CamScanner

Ex.#3 Une firme fabrique 3 produits A, B et C. Ces produits passent par 3 machines pour des opérations selon le tableau ci-dessous. Les machines sont disponibles 430mn, 460mn et 420 mn respectivement la journée.

Les produits sont vendus à raison de 3, 2 et 5 dollars l'unité.

	Machine 1	Machine 2	Machine 3
Produit A	1mn	3mn	1mn
Produit B	2mn	-	4mn
Produit C	1mn	2mn	-

Donner le modèle mathématique maximisant le prix de vente des produits.

Ex.#4 Etudier la convexité ou la concavité des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = x^2$$
$$f_2(x_1,x_2) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$
$$f_3(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$f_4(x_1,x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 2x_2 + 10$$
$$f_5(x_1,x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^3$$
$$f_6(x_1,x_2) = x_1 x_2$$
$$f_7(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1^4$$
$$f_8(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

Ex.#5 Trouver analytiquement les minima et les maxima des fonctions suivantes:

$$f_1(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{6}x_2^3$$
$$f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^3 - 2x_1x_2 - x_2$$
$$f_3(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$$
$$f_4(x) = x^3$$
$$f_5(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$$
$$f_6(x_1,x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1 + 2x_2 + 10$$

Ex.#6 Calculer les extrema des fonctions suivantes. Montrer qu'ils sont globaux et uniques

$$f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$f_2(x_1,x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 3$$
$$f_3(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 + 6x_2$$
$$f_4(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 2x_1 + 1$$

Scanned by CamScanner

Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
Master 1

Année 2017/2018

Optimisation: TD n°2

Ex.#1 On considère la fonction suivante

$$f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2)$$

1. Déterminer analytiquement les extrema de cette fonction.

2. En partant du point initial $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (3,2)^T$, déterminer le minimum de la fonction en utilisant :

- La méthode du Gradient à pas optimal
- X La méthode du Gradient conjugué
- La méthode de Newton

3. Tracer les itérés x^k obtenus dans chaque méthode.

On utilisera comme critère d'arrêt la condition suivante:

$$\|\nabla f(x^k)\| \le \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = 10^{-2}$$

Ex.#2 Trouver graphiquement les solutions des programmes linéaires suivants :

Max $(x_1 + 3x_2)$
s.c :
$2x_1 + 5x_2 \le 10$
$3x_1 + 4x_2 \le 12$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Min $(x_1 - x_2)$
s.c :
$2x_1 + 3x_2 \le 12$
$3x_1 + x_2 \le 9$
$x_1 + x_2 \ge 2$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Max$(x_1 + x_2)$
s.c :
$-2x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 + x_2 \le 3$
$x_2 \le 2$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Scanned by CamScanner

Ex.#3 Déterminer toutes les solutions de base du système suivant:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

Ex.#4 Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant:

Max $2x_1 + x_2$
s.c :
$x_1 + x_2 \leq 4$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 5$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Ex.#5 Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant:

Max $x_1 - 3x_2 - 2x_3$
s.c:
$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 0 \leq x_3 \leq 2$

Trouver la forme duale de ce problème.

Ex.#6 Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant:

$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min}$
s.c :
$3x_1 + x_2 \geq 3$
$4x_1 + 3x_2 \geq 6$
$x_1 + 2x_2 \leq 3$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Trouver la forme duale de ce problème.

Ex.#7 Résoudre par la méthode du simplexe le programme linéaire suivant:

Max $2x_1 + x_2$
s.c :
$x_1 + x_2 \leq 4$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 5$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Trouver la forme duale de ce problème et déduire sa solution optimale.

Scanned by CamScanner

Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
Master 1

Année 2017/2018

Optimisation: TD n°3

Ex.#1 Résoudre le programme nonlinéaire suivant:

Max $(-2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2)$

s.c :

$g_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$

$g_2(x) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

Ex.#2 Résoudre le programme nonlinéaire suivant:

Min $(2x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 2x_2)$

s.c:

$h_1(x) = x_1 - x_2 \geq 0$

$h_2(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$

Ex.#3 Résoudre le programme nonlinéaire suivant:

Min $((x_1 - 1)^2 + x_2 - 2)$

s.c :

$x_2 - x_1 - 1 = 0$

$x_1 + x_2 \leq 4$

Ex.#4 Considérons le programme nonlinéaire suivant:

Min $(x_1^2 + x_2^2)$

s.c :

$2x_1 + x_2 + 4 = 0$

Résoudre ce problème en utilisant la méthode de Lagrange-Newton en partant du point initial $x^0 = [x_1^0\, x_2^0]^T = [0\,0]^T$.

Scanned by CamScanner