

# Module : systèmes non linéaires

Ahmed MAIDI (UMMTO)

Master académique (AS et AI)

*ahmed.maidi@gmail.com*

25 avril 2020

## Chapitre 2. Méthode du plan de phase

- 1 Définitions générales
- 2 Construction pratiques des trajectoires de phase
- 3 Cycles limites
- 4 Solution numérique d'un modèle mathématique
- 5 Exercices

La méthode du **plan de phase** est une technique **graphique** utilisée pour l'étude des systèmes non linéaires et la conception des correcteurs. Cette méthode est limitée aux systèmes non linéaires dont la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire du **second ordre**. Notons que la plupart des systèmes dynamiques peuvent être modélisés par des équations de second ordre. La méthode du plan de phase permet d'examiner graphiquement l'évolution de la solution de l'équation différentielle pour comprendre le comportement du système et tirer une conclusion sur la stabilité.

Le principe de la méthode du plan de phase, introduite par Henri Poincaré, consiste à **générer dans l'espace** d'état d'un système dynamique du second ordre, appelé **plan de phase**, les trajectoires (solutions des équations différentielles ordinaires) du mouvement obtenues pour **différentes conditions initiales** et d'en examiner les caractéristiques qualitatives.

## Définitions générales

On considère le système non linéaire autonome non forcé décrit par le modèle d'état :

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \quad (2)$$

avec la condition initiale

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

### Plan de phase

Le plan  $Ox_1x_2$  est appelé **plan de phase**.

On suppose que la fonction vectorielle

$$f(x_1(t), x_2(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

vérifie les conditions d'existence de la solution (**voir le chapitre 1**). Dans ce cas, pour une condition donnée  $x(0)$ , on obtient une solution  $x(t)$ .

# Définitions générales

## Trajectoire de phase

La représentation de la solution  $x(t)$ , quant  $t$  varie de 0 à  $+\infty$ , par une courbe paramétrée par  $t$  dans le plan de phase appelé **trajectoire de phase**.

## Exemple : Trajectoire de phase

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \end{cases}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

La solution  $x(t)$  est donnée comme suit :  $x_1(t) = 2e^{-t}$  et  $x_2(t) = 4e^{-2t}$ . Pour tracer la **trajectoire de phase** dans le plan  $Ox_1x_2$ , on a :

$$x_2(t) = 4 (e^{-t})^2 \Rightarrow x_2(t) = 4 \left( \frac{1}{2} \underbrace{2e^{-t}}_{x_1(t)} \right)^2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 \quad (6)$$

## Exemple : Trajectoire de phase

L'allure de la trajectoire est donnée par la Figure 1. Les points **vert et jaune** désignent respectivement la condition initiale  $x(0)$  et le point d'équilibre. La **flèche rouge** indique le sens d'évolution de la trajectoire.

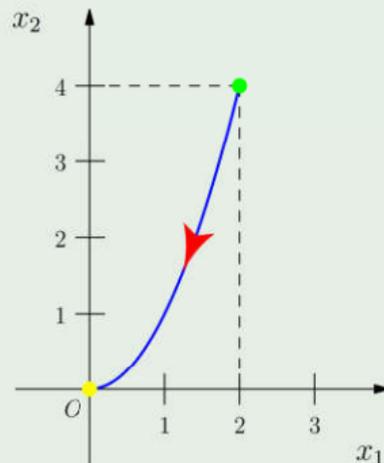


FIGURE 1 – Trajectoire de phase.

# Définitions générales

## Portrait de phase

L'ensemble des trajectoires de phase pour différentes conditions initiales est appelé **portrait de phase**.

## Exemple : Portrait de phase

Le portrait de phase de l'exemple précédent obtenues en considérant 4 conditions initiales est donné par la Figure 2.

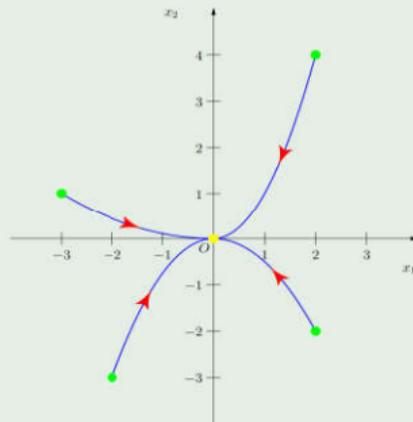


FIGURE 2 – Portrait de phase.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

La construction d'un portrait de phase pour un système dynamique de second ordre revient à tracer les trajectoires en considérant un grand nombre de conditions initiales. Les méthodes utilisées pour la construction d'un portrait de phase sont :

- 1 **Méthode analytique** : elle est basée sur l'**utilisation de la solution analytique  $x(t)$**  des équations différentielles ordinaires régissant la dynamique du système. L'application de la méthode reste limitée car elle est conditionnée par la détermination de la solution analytique, ce qui n'est pas toujours possible.
- 2 **Méthode des isoclines** : c'est une méthode purement **graphique** qu'on peut utiliser même pour les systèmes dont la solution analytique est impossible à déterminer.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode analytique

Il existe deux techniques qu'on peut utiliser pour construire le portrait de phase d'un système.

- 1 **Élimination du temps explicitement** : on résout analytiquement les équations du modèle pour déterminer les solutions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Puis, on élimine la variable temps pour déterminer l'équation de la trajectoire dans le plan de phase sous la forme :

$$\psi(x_1, x_2) = 0 \quad (7)$$

Dans l'exemple précédent, on a appliqué cette méthode et on a obtenu  $\psi(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ , par conséquent l'équation de la trajectoire est  $x_2 - x_1^2 = 0$ .

- 2 **Élimination du temps implicitement** : on élimine directement le temps en posant :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (8)$$

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode analytique

Puis, on résout cette équation différentielle pour obtenir l'équation de la trajectoire  $\psi(x_1, x_2) = 0$ .

### Exemple : Deuxième technique

Pour l'exemple précédent, il vient :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = 2 \frac{dx_1}{x_1} \quad (9)$$

En intégrant l'équation différentielle, on obtient :

$$\ln |x_2| = 2 \ln |x_1| + \ln |c| \Rightarrow \ln |x_2| = \ln |x_1^2| + \ln |c| \Rightarrow \ln |x_2| = \ln |c x_1^2| \quad (10)$$

Ce qui donne la solution  $x_2 = c x_1^2$ . En imposant la condition initiale, c'est-à-dire  $x_2(0) = c x_1^2(0)$  ce qui donne  $4 = c 2^2$ , on obtient  $c = 1$ . Par conséquent, l'équation pour la trajectoire de phase  $\psi(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0$ .

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode analytique

La méthode analytique peut être appliquée pour les systèmes dont les équations du modèle sont **faciles** à résoudre analytiquement en utilisant les deux techniques présentées. Cette méthode peut être appliquée par exemple pour représenter le portrait d'un **système linéaire**.

Considérons le système linéaire autonome non forcé suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} \quad (11)$$

Ce système admet un seul point d'équilibre qui est l'**origine** du plan de phase. La solution analytique de cette équation est donnée comme suit :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad (12)$$

Avec  $\Phi(t) = L^{-1} [sI_{2 \times 2} - A]$  ( $s$  est la variable de Laplace,  $I_{2 \times 2}$  est une matrice identité de dimension  $2 \times 2$  et  $L^{-1}$  désigne la transformée de Laplace inverse).

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode analytique

La solution  $x(t)$  dépend de la **nature des valeurs propres**  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice d'état  $A$ . En somme, on a les cas possible suivants :

- **cas 1** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **réelles, négatives et distinctes** ( $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Le point d'équilibre est un **noeud stable** (Figure 3).
- **cas 2** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **réelles, positives et distinctes** ( $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Le point d'équilibre est un **noeud instable** (Figure 4).
- **cas 3** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **complexes avec une partie réelle négative** ( $\lambda_1 = \alpha + j\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$  avec  $\alpha < 0$ ). Le point d'équilibre est un **foyer stable** (Figure 5).
- **cas 4** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **complexes avec une partie réelle positive** ( $\lambda_1 = \alpha + j\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$  avec  $\alpha > 0$ ). Le point d'équilibre est un **foyer instable** (Figure 6).

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode analytique

- **cas 5** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **réelles et de signe contraires** ( $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  ou  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ). Le point d'équilibre est appelé **col** ou **selle**. C'est un point d'équilibre **instable** (Figure 7).
- **cas 6** :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des **nombre imaginaires purs** ( $\lambda_1 = j\beta$  et  $\lambda_2 = -j\beta$  avec  $\alpha > 0$ ). Le point d'équilibre est un appelé **centre** (Figure 8).

Les portraits de phase correspondant aux différents points d'équilibre sont données par les figures ci-après.

## Application aux systèmes non linéaires

Le comportement qualitatif d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre peut être déterminé par **linéarisation** autour de ce point et on parle d'un comportement local, c'est-à-dire les conclusions sont valides **localement**.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode analytique

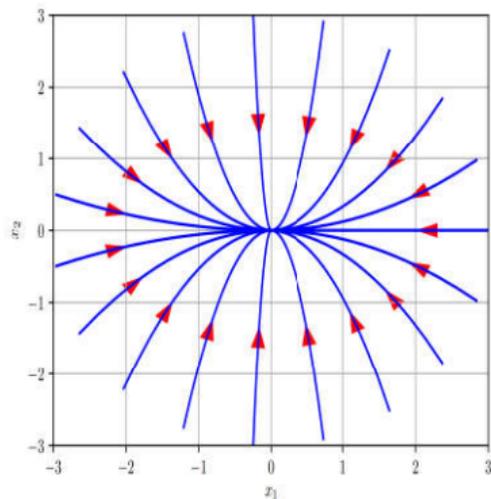


FIGURE 3 – Noeud stable.

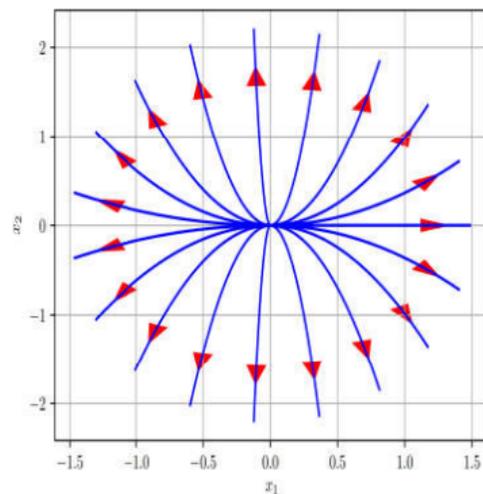


FIGURE 4 – Noeud instable.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode analytique

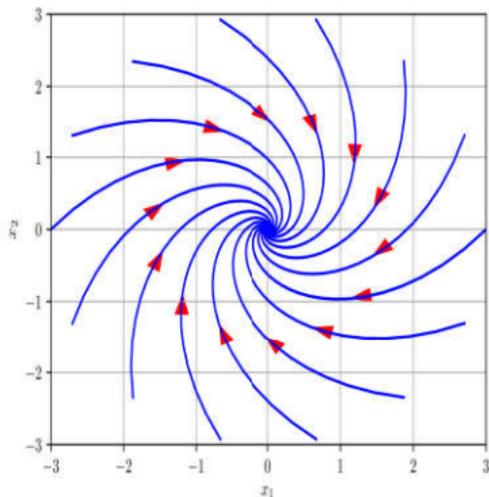


FIGURE 5 – Foyer stable.

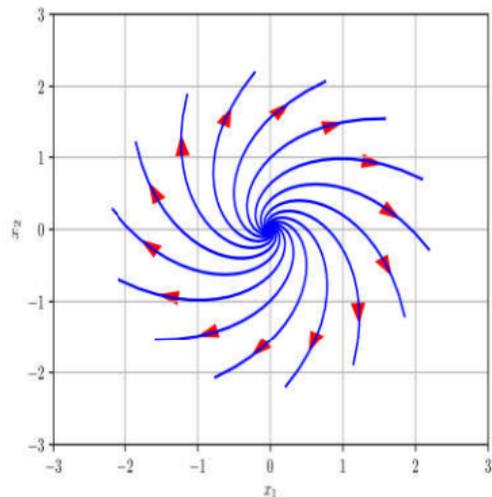


FIGURE 6 – Foyer instable.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode analytique

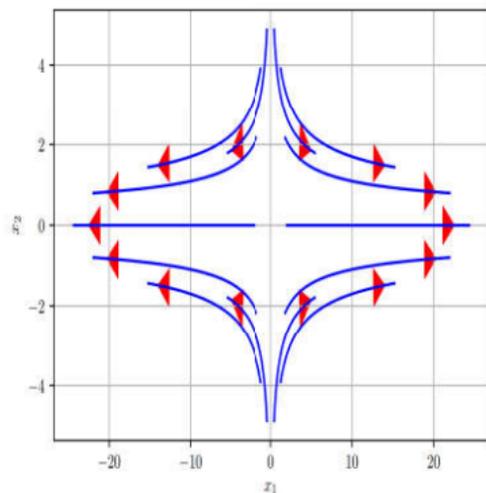


FIGURE 7 – Col ou selle.

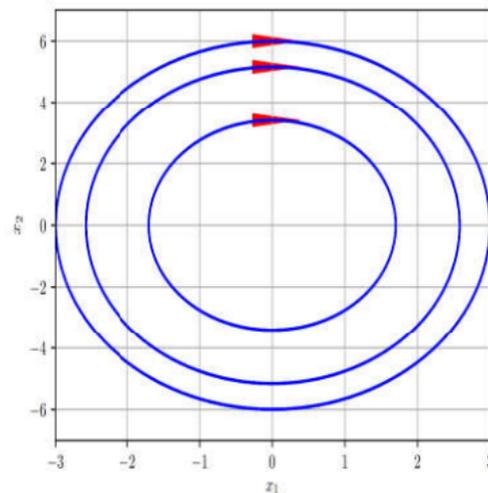


FIGURE 8 – Centre.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode des isoclines

L'équation suivante

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (13)$$

détermine pour tout point  $\mathcal{M}$  du plan de phase, de coordonnées  $x_1^*$  et  $x_2^*$ , une valeur de la dérivée  $\frac{dx_2}{dx_1}$ , c'est-à-dire le coefficient angulaire de la **tangente** à la **trajectoire de phase** passant par le point  $\mathcal{M}$  (voir la Figure 9). Par conséquent l'équation (13) définit un ensemble de directions ou, comme on dit, un **champ de directions** dans le plan de phase  $Ox_1x_2$ .

Du point de vue géométrique, l'intégration d'une équation différentielle (détermination de la solution) consiste à trouver **les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec la direction du champ en ce point.**

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

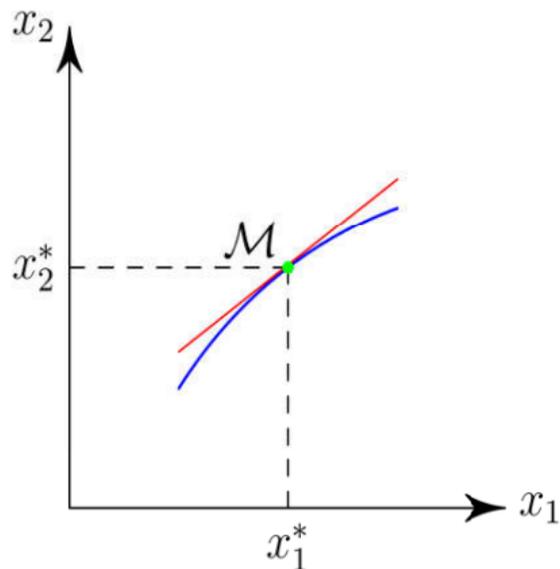


FIGURE 9 – Tangente à la trajectoire de phase passant par le point  $\mathcal{M}$ .

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode des isoclines

### Définition d'une isocline

On appelle **isocline** de l'équation différentielle (13) le lieu géométrique des points vérifiant la relation

$$C = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (14)$$

D'après la définition, pour chaque constante  $C$  correspond une isocline dont l'équation est :

$$s(x_1, x_2) = C f_1(x_1, x_2) - f_2(x_1, x_2) = 0 \quad (15)$$

Une fois la famille des isoclines, obtenues pour différentes valeurs de  $C$ , est construite, nous pouvons **représenter approximativement** la famille des **trajectoires de phase**. Les isoclines permettent de définir l'allure des trajectoires de phase dans le plan de phase.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

## Méthode des isoclines

Pour construire le portrait de phase en utilisant la méthode des isoclines, on suit les étapes suivantes :

- **Étape 1** : pour **chaque valeur de  $C$** , on trace la courbe isocline dans le plan de phase,
- **Étape 2** : tracer le long de la courbe isocline de **courts segments de droite** de pente  $C$  (les segments sont parallèles et leur **direction** est déterminée par le **signe** de  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ ).
- **Étape 3** : à partir de la condition initiale  $x(0)$ , on construit la trajectoire de phase partant de  $x(0)$  en reliant les **segments entre eux**.

### Remarques :

- Les étapes **1** et **2** sont à **répéter** pour plusieurs valeurs de  $C$  pour remplir le plan de phase d'isoclines,
- L'étape **3** est à **répéter** pour plusieurs conditions initiales pour représenter le portrait de phase (remplir le plan de phase de trajectoires de phase).

### Exemple : Construction du portrait de phase

Considérons l'exemple précédent.

- **Étape 1** : l'équation de l'isocline est obtenue comme suit :

$$C = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{2x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{C}{2}x_1 \quad (16)$$

On remarque que les isoclines sont des droites de pente  $C/2$  passant par l'origine.

L'isocline correspondante pour  $C = 2$  est donnée par la Figure 10.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

## Exemple : Construction du portrait de phase

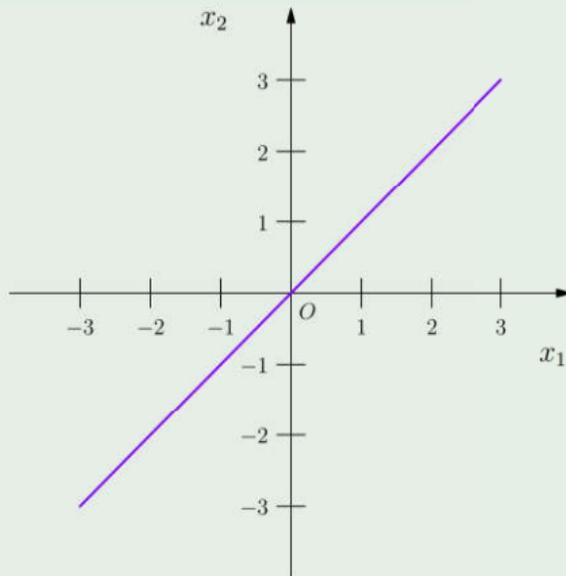


FIGURE 10 – Courbe isocline avec  $C = 2$ .

### Exemple : Construction du portrait de phase

- **Étape 2** : on trace le long de la courbe isocline de courts segments de droite de pente  $C$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  est un point de l'isocline de coordonnées  $x_1^*$  et  $x_2^*$ . Ainsi, l'équation d'un segment est donnée comme suit :

$$x_2 = C(x_1 - x_1^*) + x_2^* \quad (17)$$

Ainsi, pour chaque point  $\mathcal{M}$ , le segment est obtenu en traçant la droite (17) pour  $x_1 \in [x_1^* - \Delta x_1, x_1^* + \Delta x_1]$ . Le petit segment correspondant au point  $\mathcal{M}$  de coordonnées  $x_1^* = 2$  et  $x_2^* = 2$  obtenu avec un  $\Delta x_1 = 0.125$  est donné par la Figure 11. Une fois cette étape est répétée plusieurs fois, on obtient la Figure 12.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

## Exemple : Construction du portrait de phase

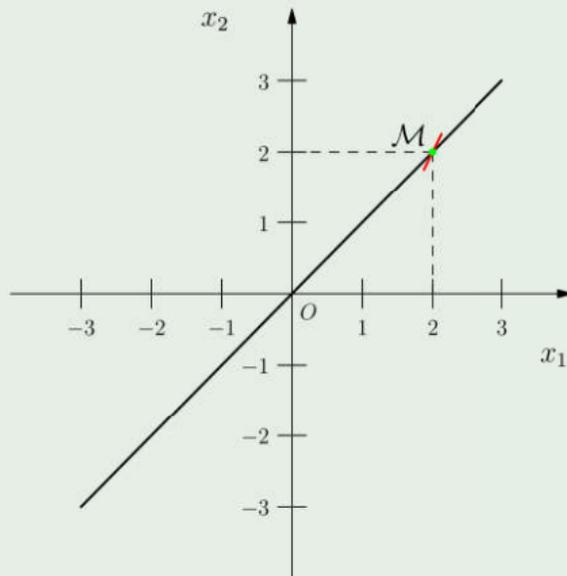


FIGURE 11 – Segment au point  $\mathcal{M}$ .

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

## Exemple : Construction du portrait de phase

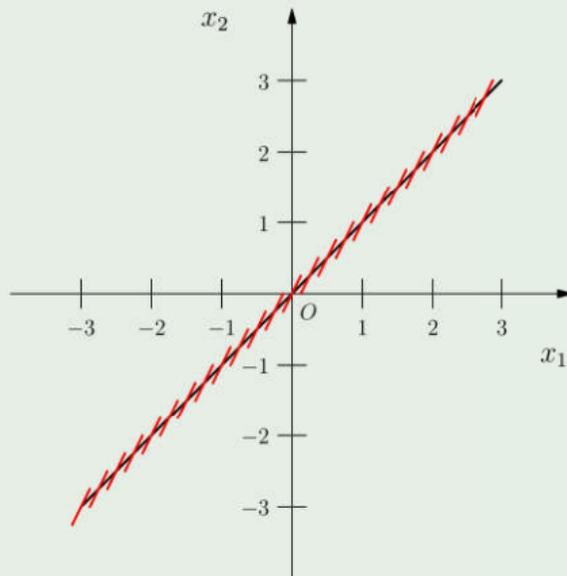


FIGURE 12 – Isocline avec segments.

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

## Exemple : Construction du portrait de phase

En répétant les deux étapes précédentes pour plusieurs valeurs de  $C$ , on obtient les différentes isoclines avec leurs segments qui remplissent le plan de phase (Figure 13).

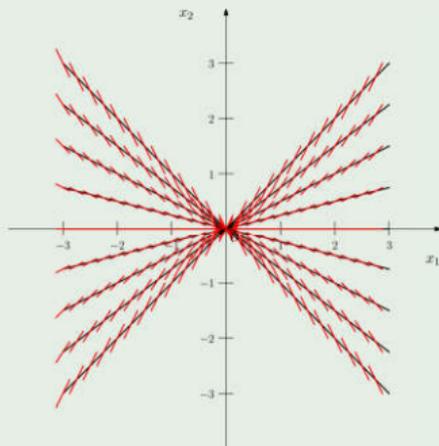


FIGURE 13 – Isoclines avec segments.

### Exemple : construction du portrait de phase

- **Étape 3** : à partir de la condition initiale  $x(0) = [-1.125, 1.265625]^T$ , on construit la trajectoire de phase partant de  $x(0)$  et reliant les segments entre eux (voir la Figure 14).

En répétant l'étape **3** pour plusieurs conditions initiales, on obtient le portrait de phase correspondant à un nœud stable (voir Figure 3).

Notons que au point  $x(0) = [-1.125, 1.265625]^T$ , on a le champ de direction suivant :

$$\begin{bmatrix} f_1(x(0)) \\ f_2(x(0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1250 \\ -2.5313 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Par conséquent, de cette condition initiale la trajectoire de phase va dans la direction positive de  $x_1$  et dans la direction négative de  $x_2$ .

# Construction pratiques des trajectoires de phase

Méthode des isoclines

## Exemple : Construction du portrait de phase

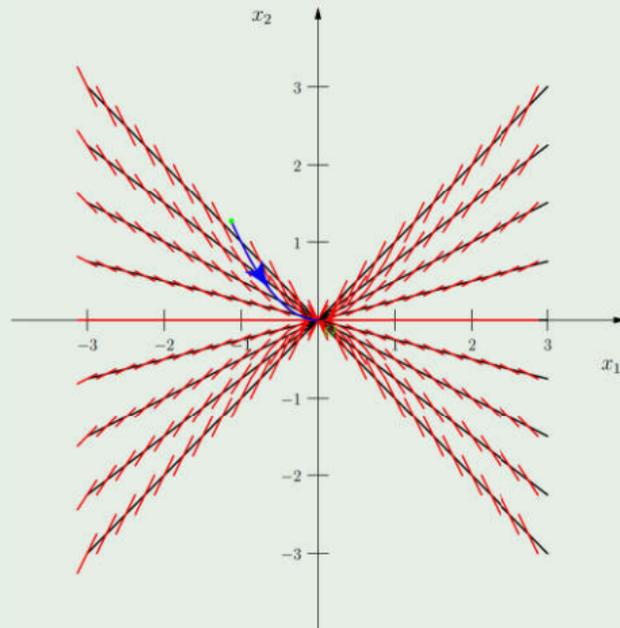


FIGURE 14 – Trajectoire de phase.

## Définition

Un cycle limite, noté  $C$ , est une trajectoire **fermée unique** dans le plan de phase.

La trajectoire reflète la **périodicité** du mouvement et son caractère **oscillatoire**.

On distingue trois type de cycles limites :

- 1 **Stable** : toutes les trajectoires dans un **voisinage** du cycle  $C$ ,
- 2 **Instable** : toutes les trajectoires **divergent** de  $C$ ,
- 3 **Semi-stable** : **certaines** trajectoires **convergent** vers  $C$ .

## Théorème de Bendixson

Aucun cycle limite ne peut exister dans une région  $\Omega$  du plan de phase dans laquelle

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (19)$$

ne s'**annule** pas ni ne **change de signe**.

## Théorème de Poincaré-Bendixson

Si une trajectoire demeure dans une région finie  $\Omega$  alors une des trois propositions suivantes est vraie :

- 1 La trajectoire va vers un équilibre.
- 2 La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.
- 3 La trajectoire est elle même un cycle limite.

## Exemple : Cycle limite

L'oscillateur de Van der Pol est donné par le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (20)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \mu(1 - x_1^2(t))x_2(t) \quad (21)$$

## Exemple : Cycle limite

La trajectoire de phase obtenue pour une condition initiale  $x(0) = [1 \ 1]^T$  et  $\mu = 0.5$  est donnée par la Figure 15.

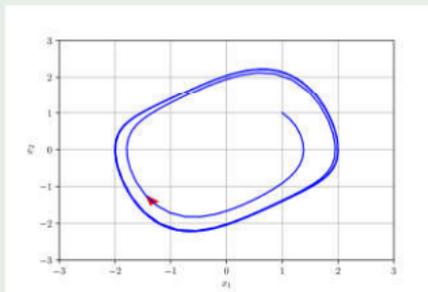


FIGURE 15 – Cycle limite.

## Remarque

Un point d'équilibre stable est dit **attractive** par contre s'il est instable on dit qu'il est **répulsif**.

# Solution numérique d'un modèle mathématique

Avec l'évolution de l'informatique, on dispose actuellement des logiciels <sup>1</sup> qui sont capables de résoudre les équations différentielles analytiquement (calcul formel ou symbolique) ou numériquement.

Parmi les logiciels, on peut citer Maple, Mathematica, Matlab, Sage et Maxima pour le calcul formel, et Matlab, Scilab, Freemath et Octave pour le calcul numérique. Ces logiciels disposent des programmes capables de résoudre tous les types d'équations différentielles. A condition de choisir le solveur (algorithme) adéquat et de bien le paramétrer.

Ainsi, on peut tracer un portrait de phase d'un système en un temps faible avec quelques lignes de code.

---

1. Les logiciels indiqués en couleur bleue sont gratuits et disponibles au téléchargement



**Exo. 1** Étudier la nature des point d'équilibre du système suivant :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (22)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t)) - \frac{x_2(t)}{2} \quad (23)$$

**Exo. 2** On demande pour le système linéaire suivant :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (24)$$

$$\dot{x}_2(t) = -4x_1(t) \quad (25)$$

- 1 de déterminer analytiquement l'équation de la trajectoire de phase en utilisant les techniques d'élimination du temps (explicite et implicite),
- 2 le type de la trajectoire de phase,
- 3 la nature du point d'équilibre (l'origine).

**Exo. 3** Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = x^3(t) - 2x^2(t) - x + 2 \quad (26)$$

- 1 tracer la trajectoire du système dans le plan  $Ox\dot{x}$ ,
- 2 déterminer les points d'équilibre du système,
- 3 analyser la stabilité des points d'équilibre.

**Exo. 4** Soit l'asservissement non linéaire de la Figure 16. Les caractéristiques de cet asservissement non linéaires sont données par

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{p(1 + \tau p)}; \quad u = f(e) \quad (27)$$

- 1 pour  $f(e) = M \operatorname{sign}(e)$  (l'élément non linéaire est un relais), donner le modèle d'état du système d'asservissement (système en boucle fermée),
- 2 donner les équations paramétriques de la trajectoire ( $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ ),
- 3 déduire la trajectoire de phase.

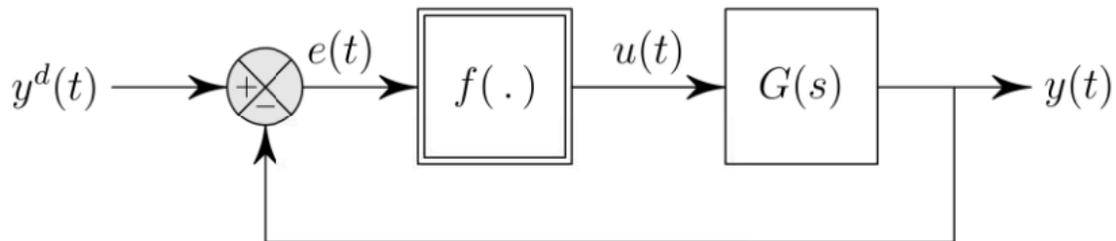


FIGURE 16 – Asservissement non linéaire.