

Module : systèmes non linéaires

Ahmed MAIDI (UMMTO)

Master académique (AS et All)

ahmed.maidi@gmail.com

5 mai 2020

Errata : quelques erreurs à corriger.

- Chapitre 1, Page 15, Figure 1 : 5) Relais (commutateur tout-ou-rien).
- Chapitre 1, Page 15, Figure 2 : 3) Seuil avec saturation, 5) Relais avec hystérésis.
- Chapitre 1, Page 24, Équations (45) et (46) :

$$\Delta \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix} \Delta x(t)$$

- Chapitre 2, Page 11, Juste après l'équation (12) :

$$\Phi(t) = L^{-1} \left[(sI_{2 \times 2} - A)^{-1} \right]$$

Chapitre 2. Méthode du premier harmonique

- 1 Équivalent harmonique
- 2 Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)
- 3 Application de la méthode du premier harmonique
- 4 Stabilité d'un asservissement non linéaire
- 5 Exercices

Équivalent harmonique

Pour un **système linéaire** (Figure 1), l'application d'une entrée du type **sinusoïdale** de la forme $u(t) = A \sin(\omega t)$ engendre en régime permanent (stationnaire) une sortie **sinusoïdale** de la forme $y(t) = B \sin(\omega t + \phi)$.

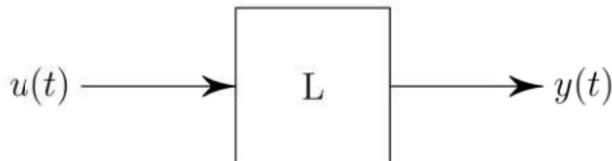


FIGURE 1 – Système linéaire.

En introduisant la notation complexe, on a :

$$u(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow u(t) = A e^{j\omega t} \quad (1)$$

$$y(t) = B \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow y(t) = B e^{j(\omega t + \phi)} \quad (2)$$

En posant $s = j\omega$, on définit la **fonction de transfert** $G(s)$ du système (Figure 2) comme le rapport complexe suivant :

Équivalent harmonique

$$G(s) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{A e^{j\omega t}}{B e^{j(\omega t + \phi)}} = \frac{B e^{j\omega t} e^{j\phi}}{A e^{j\omega t}} \Rightarrow G(s) = \frac{B}{A} e^{j\phi} \quad (3)$$

Cette fonction de transfert est caractérisée par deux grandeurs :

- le **module (gain du système)** : $|G(s)| = |B/A|$, et
- la **phase du système** : $\angle G(s) = \phi$.

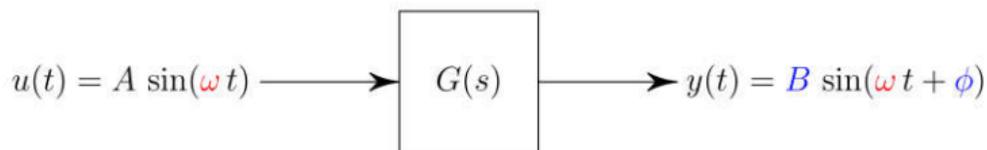


FIGURE 2 – Fonction de transfert d'un système linéaire.

On remarque que l'**équivalent harmonique** est défini **exactement** pour un système linéaire.

Équivalent harmonique

Pour un **système non linéaire** excité par une entrée **sinusoïdale** de la forme $u(t) = A \sin(\omega t)$ (Figure 3), on obtient une réponse $y(t)$ qui est **périodique**, de période $T = 2\pi/\omega$, mais **non sinusoïdale**. La sortie $y(t)$, comme elle est périodique on peut la décomposer en **série de Fourier**. Par conséquent, la sortie $y(t)$ (Figure 4) est une somme infinie de signaux **sinusoïdaux (harmoniques)** :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(k\omega t + \phi_k) \quad (4)$$

$$y(t) = B_0 \sin(\phi_0) + B_1 \sin(\omega t + \phi_1) + B_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots + B_m \sin(m\omega t + \phi_m) + \dots \quad (5)$$

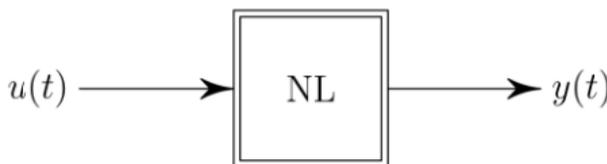


FIGURE 3 – Système non linéaire.

Équivalent harmonique

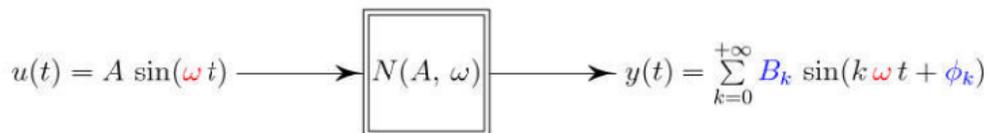


FIGURE 4 – Gain complexe équivalent d'un système non linéaire.

En supposant que le signal $y(t)$ est **symétrique**, c'est-à-dire sa **moyenne** $B_0 = 0$, alors

$$y(t) = B_1 \sin(\omega t + \phi_1) + B_2 \sin(2 \omega t + \phi_2) + \dots + B_m \sin(m \omega t + \phi_m) + \dots \quad (6)$$

La méthode (ou l'approximation) du premier harmonique consiste à **retenir que le premier harmonique $y_1(t)$** et de **négliger** les autres harmoniques **sur la base d'une hypothèse qu'on va préciser par la suite**. Par conséquent,

$$y(t) \approx y_1(t) = B_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad (7)$$

Ainsi, par analogie avec le système **linéaire**, on peut définir pour le système **non linéaire** la **fonction de transfert généralisée** suivante :

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B_1 \sin(\omega t + \phi_1)}{A \sin(\omega t)} = \frac{B_1 e^{j(\omega t + \phi_1)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{B_1}{A} e^{j\phi_1} \quad (8)$$

Cette fonction de transfert généralisée, appelée aussi **gain complexe équivalent**, est caractérisée par le **module** $|B_1/A|$ et la **phase** ϕ_1 .

Remarque

- Le signal $y_1(t)$ est appelé **signal fondamental**. Les autres $y_k(t)$ pour $k \geq 2$ sont appelés **harmoniques supérieurs**.
- En général, le signal de sortie $y(t)$ est périodique et de même période que le signal d'excitation $u(t)$.

Exemple : Réponses d'un système linéaire est un système non linéaire pour une entrée du type sinusoïdale

On considère le système linéaire :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (9)$$

et le système non linéaire (commutateur tout-ou-rien) :

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } u(t) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Pour le système linéaire, la condition initiale $y(0) = -0,2$. On excite les deux systèmes par une entrée $u(t) = 0,5 \sin(2\pi t)$, les sorties obtenues sont données par les Figures 5 et 6. On remarque clairement que la réponse du système linéaire (Figure 5) est sinusoïdale. Par contre pour le système non linéaire (Figure 6), la réponse n'est pas sinusoïdale mais elle est périodique.

Équivalent harmonique

Exemple : Réponses d'un système linéaire est un système non linéaire pour une entrée du type sinusoïdale

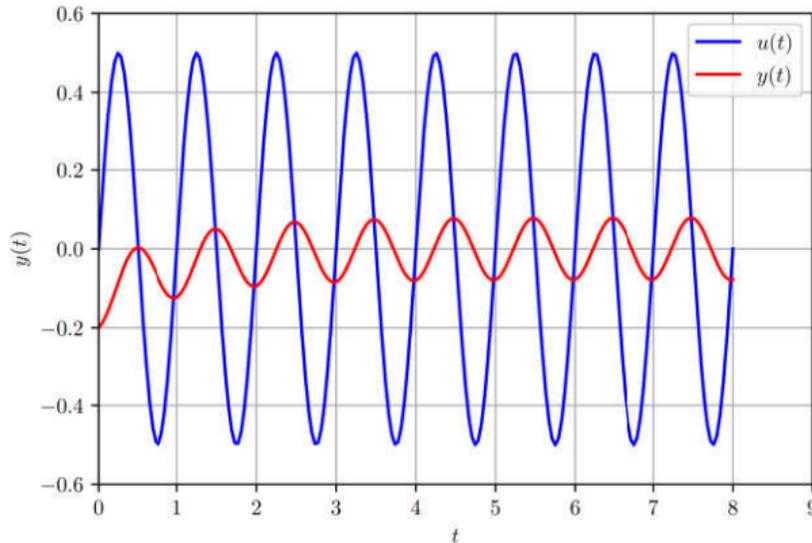


FIGURE 5 – Évolution de la sortie du système linéaire (9).

Équivalent harmonique

Exemple : Réponses d'un système linéaire est un système non linéaire pour une entrée du type sinusoïdale

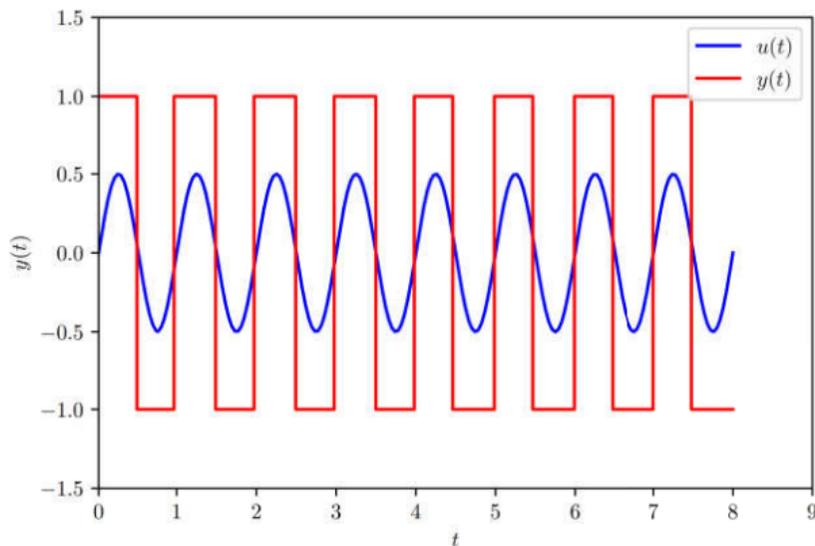


FIGURE 6 – Évolution de la sortie du système linéaire (21).

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

Dans cette section, on détermine l'expression analytique du gain complexe équivalent, noté $N(A)$, d'un élément non linéaire. En supposant que les harmoniques supérieurs pour $k \geq 2$ peuvent être **filtrés par un élément linéaire** se trouvant en **aval du l'élément non linéaire**, la sortie $y(t)$ du système non linéaire peut être écrite en fonction des **coefficients de Fourier** comme suit :

$$y(t) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) \quad (11)$$

avec

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt \quad (12)$$

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt \quad (13)$$

Cherchons maintenant la fonction de transfert (généralisée) d'un système non linéaire en faisant **apparaitre** l'entrée $u(t)$ dans l'expression de la sortie $y(t)$.

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

En multipliant par A et en divisant par A le coté droit de l'équation (11), on obtient :

$$y(t) = \frac{a_1}{A} A \sin(\omega t) + \frac{b_1}{A} A \cos(\omega t) \quad (14)$$

En multipliant par ω et en divisant par ω le deuxième terme de l'équation (14), il vient :

$$y(t) = \frac{a_1}{A} A \sin(\omega t) + \frac{b_1}{A} A \frac{1}{\omega} \omega \cos(\omega t) \quad (15)$$

Comme

$$u(t) = A \sin(\omega t), \quad \frac{du(t)}{dt} = A \omega \cos(\omega t) \quad (16)$$

L'équation (15) peut être réécrite comme suit :

$$y(t) = \frac{a_1}{A} u(t) + \frac{b_1}{A} \frac{1}{\omega} \frac{du(t)}{dt} \quad (17)$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

$$Y(s) = \frac{a_1}{A} U(s) + \frac{b_1}{A} \frac{1}{\omega} s U(s) \quad (18)$$

ou encore

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_1}{A} + \frac{b_1}{A} \frac{1}{\omega} s \quad (19)$$

En posant $s = j\omega$, on obtient l'expression du gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée) suivante :

$$N(A) = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \quad (20)$$

Différence par rapport au cas linéaire

La fonction de transfert généralisée (le gain complexe équivalent) N peut dépendre de la pulsation ω (car a_1 et b_1 peuvent dépendre de ω) et aussi de l'amplitude A du signal d'entrée $u(t)$ contrairement à la fonction de transfert dans le cas linéaire qui dépend uniquement de la pulsation ω .

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

Considérons le cas d'un commutateur tout-ou-rien (relais parfait) de la Figure 7 défini comme suit :

$$y(t) = \begin{cases} M & \text{si } u(t) \geq 0 \\ -M & \text{si } u(t) < 0 \end{cases} \quad (21)$$

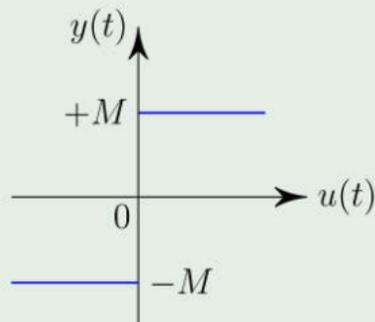


FIGURE 7 – Commutateur tout-ou-rien (relais parfait).

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

D'après la Figure 8, en injectant une entrée $u(t) = A \sin(\omega t)$, on obtient en sortie un signal carré de même fréquence et d'amplitude M . La période $T = 2\pi/\omega$.

$$N(A, \omega) = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \quad (22)$$

D'après la Figure 8, le réponse $y(t)$ est définie comme suit :

$$y(t) = \begin{cases} M & \text{si } t \leq T/2 \\ -M & \text{si } t > T/2 \end{cases} \quad (23)$$

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

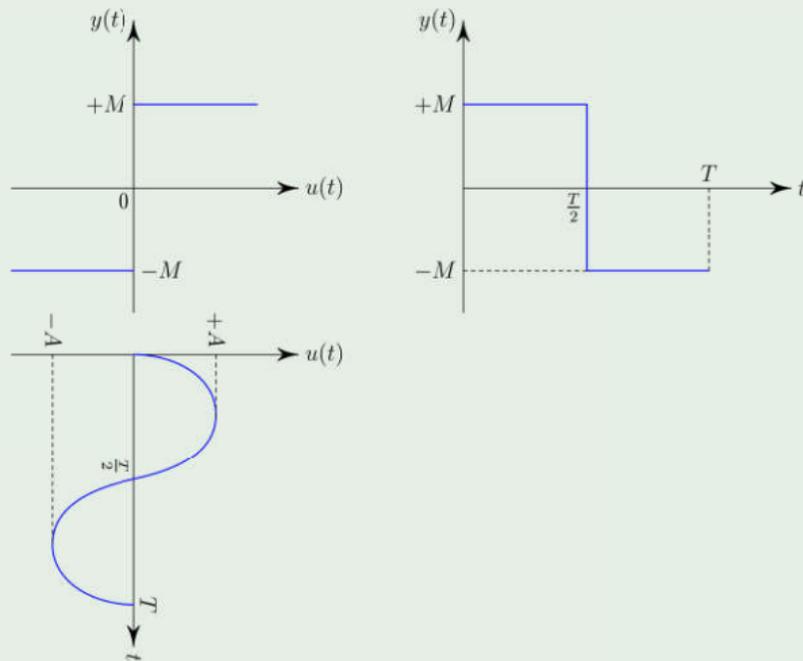


FIGURE 8 – Calcul du gain complexe du commutateur tout-ou-rien (relais parfait).

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

- Calcul du coefficient a_1 : en utilisant la formule (12), on a :

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt \quad (24)$$

$$= 2 \frac{\omega}{\pi} \int_0^{T/2} y(t) \sin(\omega t) dt \quad (25)$$

$$= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{T/2} M \sin(\omega t) dt \quad (26)$$

$$= \frac{2\omega M}{\pi} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^{T/2} \quad (27)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \left[-\cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \cos(0) \right] \quad (28)$$

$$= \frac{2M}{\pi} [-\cos(\pi) + \cos(0)] \Rightarrow a_1 = 4M/\pi \quad (29)$$

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

- Calcul du coefficient b_1 : en utilisant la formule (13), on a :

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt \quad (30)$$

$$= 2 \frac{\omega}{\pi} \int_0^{T/2} y(t) \cos(\omega t) dt \quad (31)$$

$$= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{T/2} M \cos(\omega t) dt \quad (32)$$

$$= \frac{2\omega M}{\pi} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^{T/2} \quad (33)$$

$$= \frac{2M}{\pi} \left[\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \sin(0) \right] \quad (34)$$

$$= \frac{2M}{\pi} [\sin(\pi) + \sin(0)] \Rightarrow \boxed{b_1 = 0} \quad (35)$$

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

Exemple : Calcul du gain complexe équivalent

Le gain complexe équivalent du commutateur tout-ou-rien est :

$$N(A) = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \quad (36)$$

$$= \frac{4M}{\pi A} + j \times \frac{0}{A} \Rightarrow N(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (37)$$

Remarque

Pour un élément non linéaire dont la sortie $y(t)$ est **impaire**, c'est-à-dire $y(t) = -y(-t), \forall t$, le coefficient $b_1 = 0$. Par contre si la sortie $y(t)$ est **paire**, le coefficient $a_1 = 0$. Ainsi,

- $y(t)$ est **impaire** : $N(A) = \frac{a_1}{A}$.
- $y(t)$ est **paire** : $N(A) = j \frac{b_1}{A}$.

Gain complexe équivalent (fonction de transfert généralisée)

Méthode de Tsytkin

La méthode de Tsytkin est une méthode de **calcul approché** du gain complexe équivalent. Pour certaines non linéarités, cette méthode permet de s'**affranchir du calcul des coefficients de Fourier** a_1 et b_1 . Elle permet aussi de calculer **rapidement** le gain complexe équivalent et de **concevoir** certaines non linéarités avec un certain gain complexe équivalent $N(A)$. Donc, la méthode de Tsytkin sert à la fois pour l'analyse et la synthèse.

Pour un système non linéaire ayant une caractéristique $y(t) = f(u(t))$ à **symétrie impaire et univoque** ou sous forme d'un **polynôme dont l'ordre est inférieur ou égale à 3**, le gain complexe équivalent peut être approché par la formule suivante :

$$N(A) = \frac{2}{3A} \left[f(A) + f\left(\frac{A}{2}\right) \right] \quad (38)$$

Application de la méthode du premier harmonique

Conditions de validité

Pour appliquer la méthode du premier harmonique pour l'étude d'un asservissement non linéaire, on doit d'abord vérifier les conditions suivantes :

- 1 **Condition de séparabilité** : L'asservissement non linéaire doit contenir un **seul** élément non linéaire qu'on **peut isoler** en mettant l'asservissement sous la **forme canonique** de la Figure 9.
- 2 **Condition de filtrage** : la **partie linéaire** de l'asservissement doit être **stable** (les pôles sont stables) et **a minimum de phase** (les zéros sont stables). Cette partie doit aussi se comporter comme un **filtre passe-bas**. Cette condition permet de **filtrer les harmoniques supérieurs**, par conséquent l'approximation du premier harmonique est acceptable.
- 3 **Invariance dans le temps de l'élément non linéaire** : une **translation de l'entrée** $u(t)$ se traduira par **une même translation dans le temps de la sortie** $y(t)$.

Application de la méthode du premier harmonique

Conditions de validité

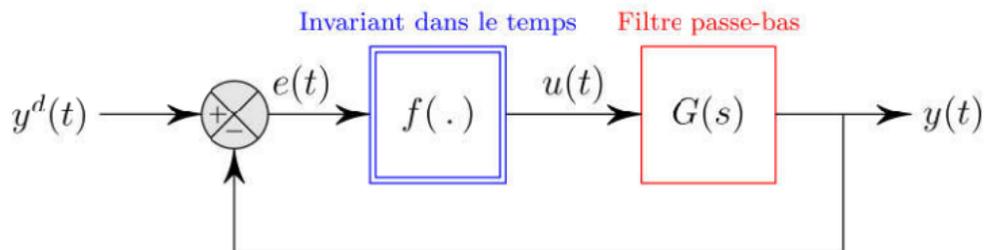


FIGURE 9 – Forme canonique d'un asservissement non linéaire (séparation de la partie linéaire et de la partie non linéaire).

Stabilité d'un asservissement non linéaire

La méthode du premier harmonique permet d'étudier la **stabilité** d'un asservissement non linéaire et l'**existence de cycles limites**. Pour un cycle limite, on peut aussi déterminer **approximativement son amplitude et sa fréquence**. La méthode du premier harmonique permet de généraliser le critère de **Revers** qui représente une version simplifiée du critère de Nyquist au système non linéaire.

Considérons, l'asservissement linéaire de la Figure 10 pour lequel on suppose que le système linéaire $G(s)$ est **stable** (les pôles sont stables) et à **minimum de phase** (les zéros sont stables). La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(s) = \frac{Y^d(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (39)$$

Le dénominateur de la fonction de transfert (39) représente le **polynôme caractéristique**.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

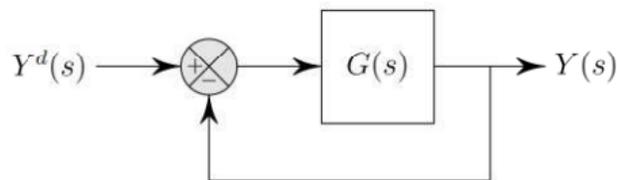


FIGURE 10 – Asservissement linéaire.

Stabilité

Si le polynôme caractéristique $1 + G(s)$ a des racines (pôles) à partie réelle négative, l'asservissement en boucle fermée (Figure 10) est stable.

Critère du revers

Si le lieu de Nyquist de $G(s)$ parcouru dans le sens des ω croissants laisse à gauche le point critique $(-1, 0)$ (voir la Figure 11), alors le système en boucle fermée (Figure 10) est stable.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

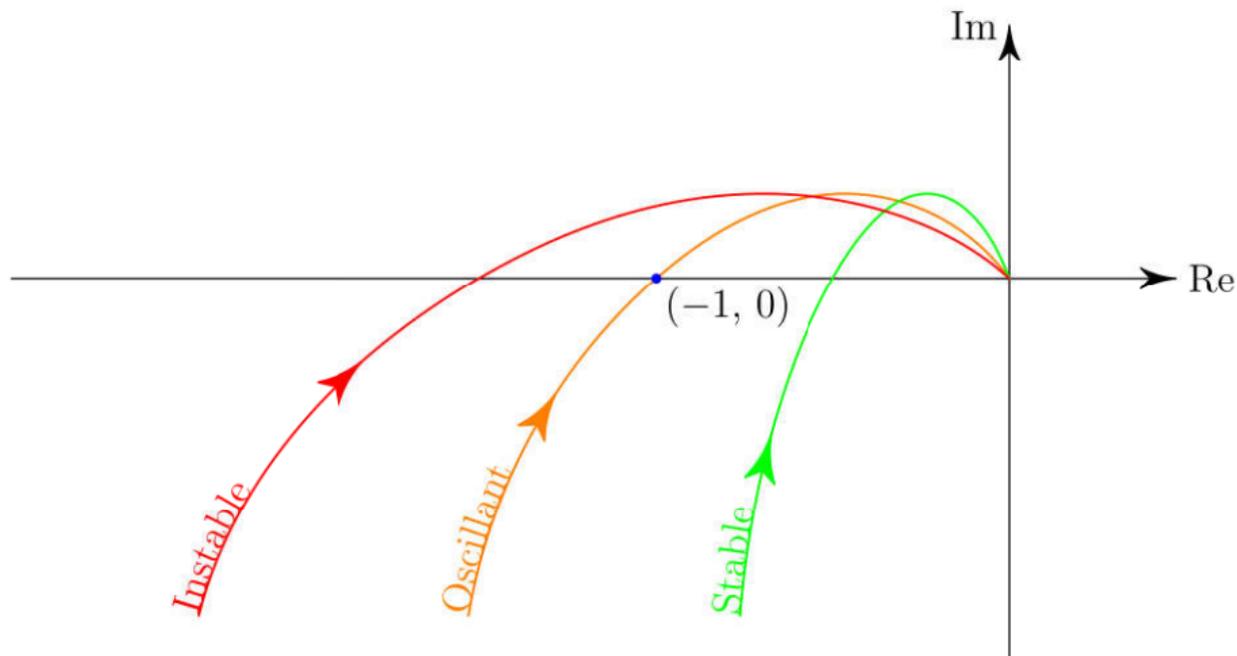


FIGURE 11 – Critère du revers dans le plan de Nyquist.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

La fonction de transfert généralisée de l'asservissement non linéaire de la Figure 9 est donnée comme suit :

$$\frac{Y(s)}{Y^d(s)} = \frac{N(A) G(s)}{1 + N(A) G(s)} \quad (40)$$

Pour avoir la **condition d'oscillation** (d'existence du cycle limite), on doit annuler le dénominateur de la fonction de transfert généralisée (40) :

$$1 + N(A) G(s) = 0 \quad (41)$$

La résolution de cette équation permet de déterminer les **pulsations et les amplitudes des cycles limites**. L'équation caractéristique (41) peut être réécrite comme suit :

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = C(A) \quad (42)$$

où $C(A)$ représente le **lieu critique** qui généralise la notion du **point critique** $(-1, 0)$ dans le cas des systèmes linéaires.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

Ainsi, les amplitudes et les pulsations des cycles limites peuvent être déterminées en résolvant graphiquement l'équation (42). Les solutions sont les **intersections** entre les courbes de lieu de transfert linéaire $G(j, \omega)$ et du lieu critique $C(A)$ (indiquées par des points verts dans la Figure 12).

Pour étudier la stabilité des cycles limites, on utilise le théorème géométrique de Loeb.

Théorème : Critère géométrique de Loeb

Soit une oscillation limite (cycle limite) obtenue comme intersection du lieu de transfert $G(j, \omega)$ et du lieu critique $C(A)$, possédant une pulsation ω_0 et une amplitude A_0 . Cette oscillation est stable si l'intersection est telle que, en parcourant le lieu de Nyquist $G(j, \omega)$ dans le **sens des fréquences croissantes** (ω), on laisse à sa **gauche la direction des amplitudes (A) croissantes** sur le lieu critique.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

Par exemple, dans le cas de la Figure 12 on a deux intersections de coordonnées (A_0, ω_0) et (A_1, ω_1) entre $G(j\omega)$ et $C(A)$, alors on a deux cycles limites. D'après le critère géométrique de Loeb, on conclut que :

- Pour une amplitude $A < A_0$, l'asservissement en boucle fermée est stable.
- Pour une amplitude $A > A_0$ et $A < A_1$, l'asservissement en boucle fermée instable.
- Pour une amplitude $A > A_1$, l'asservissement en boucle fermée est stable.
- Le cycle limite caractérisé par l'amplitude A_0 et la fréquence ω_0 est stable par contre le deuxième cycle limite, caractérisé par l'amplitude A_1 et la fréquence ω_1 , est instable.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

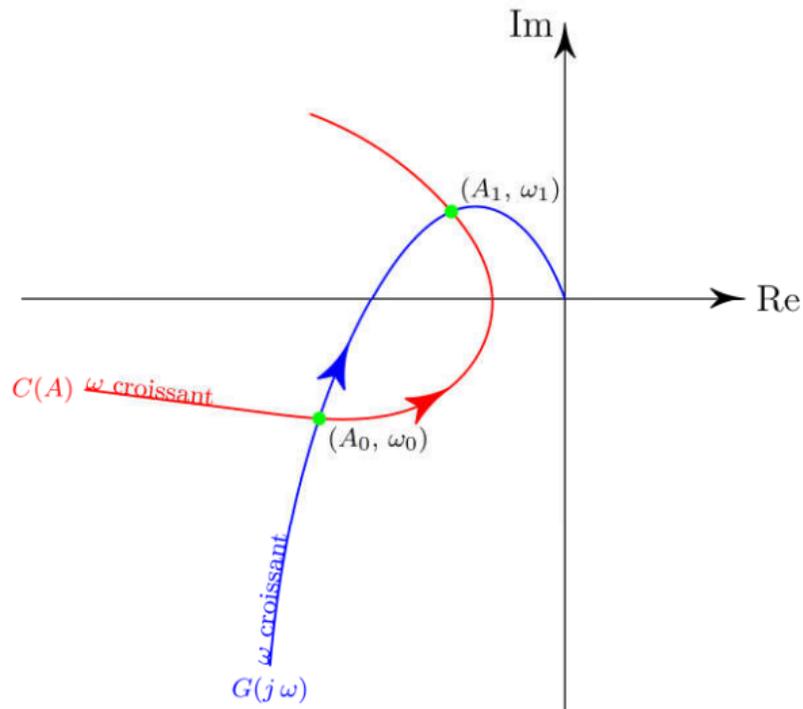


FIGURE 12 – Critère géométrique de Loeb.

Stabilité d'un asservissement non linéaire

Le critère géométrique de Loeb possède sa contre-partie algébrique.

Théorème : Critère algébrique de Loeb

Soit une oscillation limite (cycle limite) obtenue comme intersection du lieu de transfert $G(j, \omega)$ et du lieu critique $C(A)$, possédant une pulsation ω_0 et une amplitude A_0 , racines de l'équation complexe :

$$1 + N(A) G(j, \omega) = 0 \quad (43)$$

Séparant les parties réelle et imaginaires dans cette équation

$$X(A, \omega) + j Y(A, \omega) = 0 \quad (44)$$

L'oscillation (le cycle) sera **stable** si la condition suivante est vérifiée :

$$\left[\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial A} \right]_{A=A_0, \omega=\omega_0} > 0 \quad (45)$$

En résumé, pour déterminer les cycles limites, on cherche les points (A, ω) appartenant à l'ensemble suivant :

$$C(A) \cap G(j\omega) \quad (46)$$

et pour déterminer leur stabilité en utilise les critères de Loeb.

Remarque

Contrairement aux asservissements linéaires, la stabilité d'un asservissement non linéaire **dépend de l'amplitude A** .

Exemple : Etude de la stabilité d'un asservissement non linéaire

On considère l'asservissement non linéaire de la Figure 9. On donne :

$$G(s) = \frac{0,2(0,5s + 2,1)}{s(5s + 1)(5s + 1)} \quad (47)$$

L'élément non linéaire est un commutateur tout-ou-rien (relais parfait) avec $M = 2$. Ainsi, en utilisant la formule (37), on obtient le gain complexe équivalent comme suit :

$$N(A) = \frac{8}{\pi A} \quad (48)$$

On peut vérifier en utilisant le digramme de Bode que $G(s)$ est filtre passe-bas, donc l'hypothèse de filtrage est satisfaite. L'élément non linéaire est invariant dans le temps et l'asservissement à étudier est sous la forme canonique (condition de séparabilité est vérifiée), donc on peut utiliser la méthode du premier harmonique pour étudier la stabilité du système et celle des cycles limites.

Exemple : Etude de la stabilité d'un asservissement non linéaire

- **Approche graphique** : on représente dans le plan complexe, le lieu de transfert $G(j\omega)$ et le lieu critique $C(A) = -1/N(A)$ (voir Figure 13).

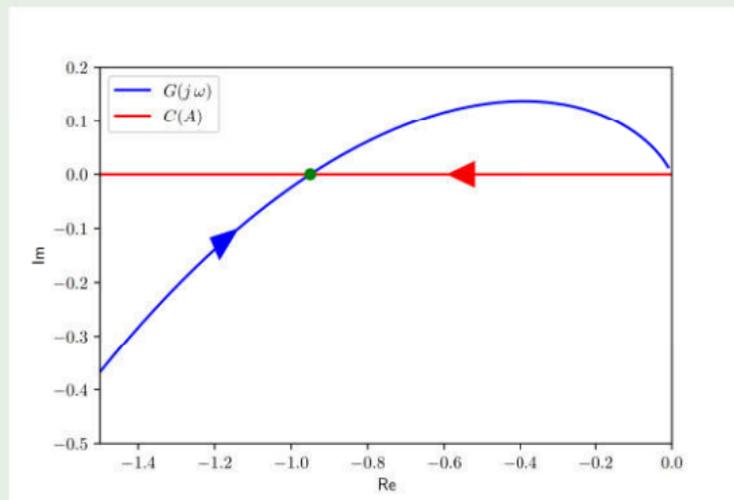


FIGURE 13 – Lieux critique $C(A)$ et lieu de transfert $G(i\omega)$.

Exemple : Etude de la stabilité d'un asservissement non linéaire

D'après la Figure 13, on remarque qu'il y a un point d'intersection entre les deux lieux donc il existe un seul cycle limite.

- **Approche analytique** : la condition d'existence d'un cycle limite s'écrit :

$$N(A)G(j\omega) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{8}{\pi A} \left(\frac{0,2(0,5j\omega + 2,1)}{j\omega(5j\omega + 1)(5j\omega + 1)} \right) + 1 = 0 \quad (49)$$

qu'on peut mettre sous la forme : $X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0$ avec :

$$X(A, \omega) = - \frac{33,6\pi A \omega^2}{100\pi^2 A^2 \omega^4 + (-25\pi A \omega^3 + \pi A \omega)^2} \quad (50)$$

$$+ \frac{0,8\omega(-25\pi A \omega^3 + \pi A \omega)}{100\pi^2 A^2 \omega^4 + (-25\pi A \omega^3 + \pi A \omega)^2} + 1 \quad (51)$$

Exemple : Etude de la stabilité d'un asservissement non linéaire

et

$$Y(A, \omega) = - \frac{8.0\pi A\omega^3}{100\pi^2 A^2 \omega^4 + (-25\pi A\omega^3 + \pi A\omega)^2} \quad (52)$$

$$- \frac{3.36(-25\pi A\omega^3 + \pi A\omega)}{100\pi^2 A^2 \omega^4 + (-25\pi A\omega^3 + \pi A\omega)^2} \quad (53)$$

La résolution du système d'équations algébriques suivant :

$$X(A, \omega) = 0 \quad (54)$$

$$Y(A, \omega) = 0 \quad (55)$$

on obtient les deux solutions suivantes :

Exemple : Etude de la stabilité d'un asservissement non linéaire

$$(A_0, \omega) = (2.4192, +0.2103), \quad (A_1, \omega) = (2.4192, -0.2103) \quad (56)$$

La deuxième solution n'a pas de sens physique puisque $\omega < 0$. En utilisant le critère géométrique de Loeb, on déduit que ce cycle limite est stable car en parcourant le lieux de transfert $G(j\omega)$ dans le sens des fréquences croissantes, on laisse à sa gauche la direction des A croissants sur le lieu critique $C(A)$.

Maintenant, en appliquant le critère algébrique de Loeb, on obtient :

$$\left[\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial A} \right]_{A=2.4192, \omega=0.2103} = \frac{18.41}{\pi^2} \quad (57)$$

Comme cette quantité est positive, alors d'après le critère algébrique de Loeb, on conclut que le cycle limite est stable.

Exo. 1 Mettre le schéma blocs de la Figure 14 sous la forme canonique

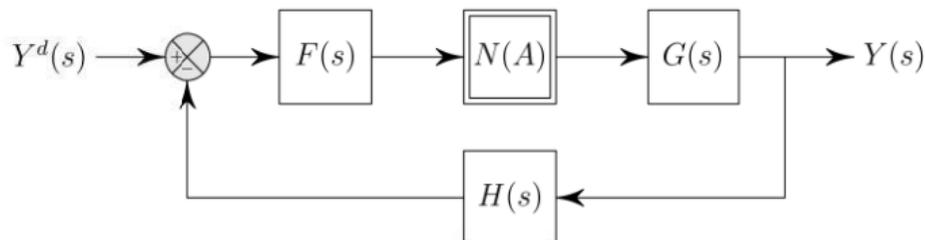


FIGURE 14 – Système asservis non linéaire.

Exo. 2 On considère un élément non linéaire dont la caractéristique entrée-sortie est définie par $y(t) = b_1 u(t) + b_3 u^3(t)$. Montrer que la fonction de transfert généralisée (gain complexe équivalent) de cette non linéarité est :

$$N(A) = \frac{3b_3}{4} A^2 + b_1 \quad (58)$$

où A est l'amplitude de l'entrée sinusoïdale ($u(t) = A \sin(\omega t)$).

Exo. 3 Soit le système asservi non linéaire donné par la Figure 15 avec

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}, \quad u(t) = f(e(t)) = e^3(t) \quad (59)$$

- 1 Calculer la fonction de transfert généralisée (gain complexe équivalent) associée à l'élément non linéaire,
- 2 Déterminer l'existence d'un ou plusieurs cycles limites pour ce système asservi. Dans l'affirmative, déterminer la stabilité, la fréquence et l'amplitude des cycles limites. On utilisera la méthode algébrique et la méthode graphique.

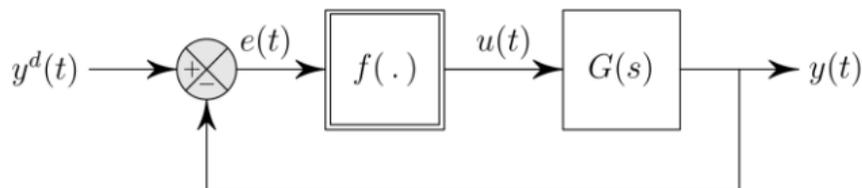


FIGURE 15 – Système asservis non linéaire.

Exercices

Exo. 4 Calculer les fonctions de transfert généralisées des éléments linéaires de la Figure 16.

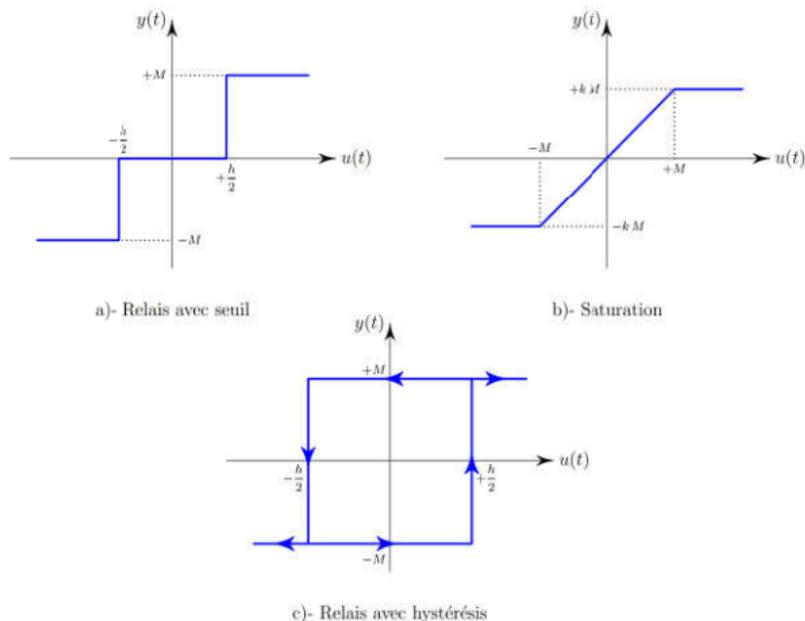


FIGURE 16 – Éléments non linéaires.