Module : systèmes non linéaires

Ahmed MAIDI (UMMTO)

Master académique (AS et AII)

ahmed.maidi@gmail.com

18 avril 2020

Chapitre 1. Généralités sur les systèmes non linéaires

Notion de système dynamique

Les variables caractéristiques d'un système dynamique sont :

- Commandes : variables à manipuler pour changer le comportement dynamique du système.
- Sorties : variables à commander pour leurs imposer un certain comportement désirées (stabilité et performances).
- Perturbations : variables aléatoires qui perturbent le fonctionnement correct du système.
- États : variables internes du système.

- Équation différentielle ordinaire : établit une relation entre la variable indépendante t, la variable dépendante (fonction inconnue) $x(t)$ et ses dérivées $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$.
- Symboliquement

$$F\left(t,\, \dot{x}(t),\, \ddot{x}(t),\, \ldots,\, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{1}$$

ou

$$F\left(t,\, \frac{dx(t)}{dt},\, \frac{d^2x(t)}{dt^2},\, \ldots,\, \frac{x^{(n)}(t)}{dt^n}\right) = 0 \tag{2}$$

- L'ordre de l'équation différentielle ordinaire est l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.
- Deux classes des équations différentielles ordinaires : équations linéaires et non linéaires.

Définition d'un système non linéaire

Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle est linéaire si :

1. le degré de la variable dépendante et de chaque dérivée contenue dans cette équation est égale à 1,
2. le coefficient de la variable dépendante et les coefficients desdérivées contenues dans cette équation sont constants ou des fonctions de la variable indépendante t.

Si une de ces deux conditions n'est pas vérifiée, l'équation différentielle ordinaire est non linéaire.

Ordre et degré d'une dérivée

$$\left(\frac{d^{(3)}x(t)}{dt^3}\right)^5 \tag{3}$$

- degré : 5.
- ordre : 3.

Exemple : classification des équations différentielles ordinaires

Classer les équations différentielles suivantes :

1. $$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} + 2\,t\,\frac{dx(t)}{dt} + x^2(t) = 0.$$
2. $$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} + 5\,x(t)\,\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.$$
3. $$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} + 3\;\sin(t)^3\,\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.$$
4. $$\left(\frac{dx^{(3)}(t)}{dt}\right)^2 + \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.$$

Exemple : classification des équations différentielles ordinaires

1. $\dfrac{dx^{(2)}(t)}{dt} + 2\,t\,\dfrac{dx(t)}{dt} + \boxed{x^2(t)} = 0$ (non linéaire, le degré de la variable $x(t)$ est 2)
2. $\dfrac{dx^{(2)}(t)}{dt} + \boxed{5\,x(t)\,\dfrac{dx(t)}{dt}} + x(t) = 0$ (non linéaire, le coefficient de la dérivée d'ordre 1 dépend de la variable dépendante $x(t)$)
3. $\dfrac{dx^{(2)}(t)}{dt} + 3\,\sin(t)^3\,\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$ (linéaire)
4. $\boxed{\left(\dfrac{dx^{(3)}(t)}{dt}\right)^2} + \dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$ (non linéaire, le degré de la dérivée d'ordre 3 $x(t)$ est 2)

Les termes encadrés sont les termes non linéaires (voir la définition d'une équation différentielle linéaire).

Notion de modèle mathématique

Utilité d'un modèle mathématique

- étudier la dynamique du système,
- concevoir un système de commande.

Obtention d'un modèle mathématique

1. Modélisation mathématique : Écriture des lois physiques régissant les différents phénomènes physiques du système.
2. modélisation expérimentale (identification) : Le principe consiste à utiliser des mesures pour déterminer le modèle.

Système non linéaire

- Un système est non linéaire si son comportement dynamique est décrits par une équation différentielle non linéaire.
- Un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition et le principe d'homogénéité.

Notion de modèle mathématique

Principe de superposition

La réponse $y(t)$ d'un système linéaire à une entrée $u(t)$ composée de la combinaison linéaire de plusieurs entrées

$$u(t) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \, u_k(t) \tag{4}$$

est la somme des réponses élémentaires $y_k(t)$ à chacune des entrées individuelles

$$y(t) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \, y_k(t) \tag{5}$$

Principe d'homogénéité

Pour une entrée $\alpha \, u(t)$, la sortie est donnée par $\alpha \, y(t)$.

Notion de modèle mathématique

Cas d'un système non linéaire

Un système non linéaire ne vérifie pas ces deux principes.

Exemple : application du principe de superposition

Considérons le système dynamique décrits par l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + 3\ \sin^3(t)\,\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = 2\,u_2(t) \tag{6}$$

Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les sorties obtenues en appliquant respectivement les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$, alors on a :

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 3\ \sin^3(t)\,\frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = 2\,u_1(t) \tag{7}$$

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + 3\ \sin^3(t)\,\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = 2\,u_2(t) \tag{8}$$

Exemple : Application du principe de supperposition

La somme des deux équations donne :

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 3\ \sin^3(t)\ \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) + \frac{d^2y_2(t)}{dt} + 3\ \sin^3(t)\ \frac{dy_2(t)}{dt^2} + y_2(t) = 2\,u_1(t) + 2\,u_2(t) \tag{9}$$

qu'on peut arranger comme suit :

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + \frac{d^2y_2(t)}{dt} + 3\ \sin^3(t)\ \frac{dy_1(t)}{dt} + 3\ \sin^3(t)\ \frac{dy_2(t)}{dt} + y_1(t) + y_2(t) = 2\,u_1(t) + 2\,u_2(t) \tag{10}$$

$$\frac{d^2(y_1(t) + y_2(t))}{dt^2} + 3\ \sin^3(t)\frac{d(y_1(t) + y_2(t))}{dt} + y_1(t) + y_2(t) = 2\,(u_1(t) + u_2(t)) \tag{11}$$

Les commande $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ produit la sortie $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Le principe de superposition est vérifié. Le système est linéaire.

Représentation d'un système non linéaire

Représentation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t),\, t) \quad \text{(Equation d'état)} \tag{12}$$

$$y(t) = h(x(t),\, u(t),\, t) \quad \text{(Equation de sortie)} \tag{13}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} \tag{14}$$

- $x \in \Re^n$: vecteur d'état,
- $u \in \Re^m$: vecteur de commande,
- $y \in \Re^r$: vecteur de sortie,
- $f : \Re^n \times \Re^m \times \Re^+ \to \Re^n$ et $h : \Re^n \times \Re^m \times \Re^+ \to \Re^r$: fonctions vectorielles non linéaires.

Représentation d'un système non linéaire

Représentation d'état

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x(t),\ u(t),\ t) \\ f_2(x(t),\ u(t),\ t) \\ \vdots \\ f_n(x(t),\ u(t),\ t) \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1(x(t),\ u(t),\ t) \\ h_2(x(t),\ u(t),\ t) \\ \vdots \\ h_r(x(t),\ u(t),\ t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

- Système affine en l'entrée

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\,u(t)$$
$$y(t) = h(x(t))$$

$$g(x(t)) = \begin{bmatrix} g_{11}(x(t)) & \dots & g_{1m}(x(t)) \\ g_{21}(x(t)) & \dots & g_{2m}(x(t)) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{n1}(x(t)) & \dots & g_{nm}(x(t)) \end{bmatrix}$$

- Système bilinéaire :
$g(x(t)) = x(t)\,E(t)$

$$E(t) \in \Re^{1\times m}$$

Représentation d'un système non linéaire

Représentation d'état

- Système libre (non forcé) : pas de $u(t)$ dans la fonction f.

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ t) \tag{16}$$

- Système autonome : pas de t dans la fonction f

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t)) \tag{17}$$

- Système linéaire :

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \tag{18}$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,x(t) \tag{19}$$

- $A \in \Re^{n\times n}$: matrice d'état.
- $B \in \Re^{n\times m}$: matrice de commande.
- $C \in \Re^{r\times n}$: matrice de sortie.
- $D \in \Re^{r\times m}$: matrice de transmission directe.

- Phénomènes physiques non linéaires (réaction chimique, mouvement d'un fluide),
- Éléments dont la caractéristique entrée/sortie est non linéaire (relais, diode, vanne).

Non linéarités de base

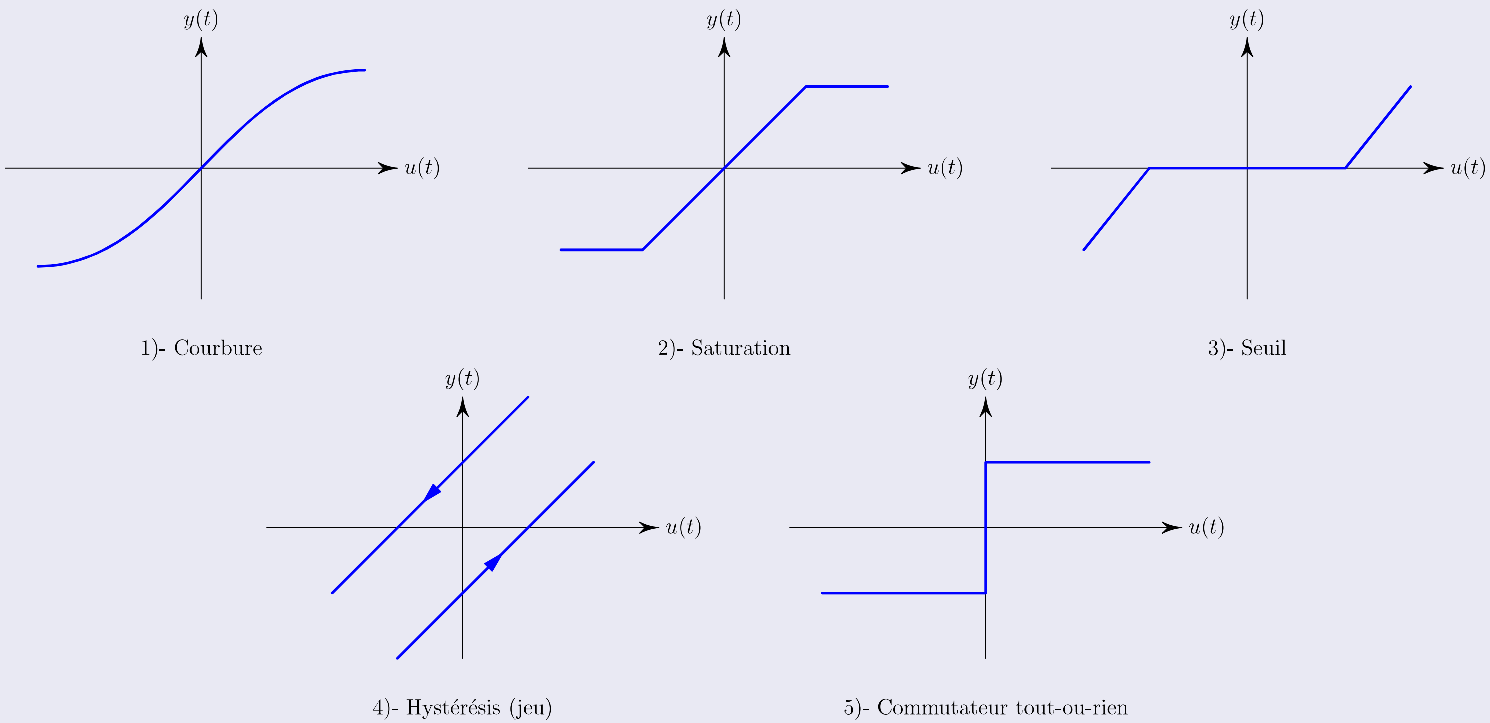

FIGURE 1 – Exemples de non linéarités de base.

Non linéarités combinées

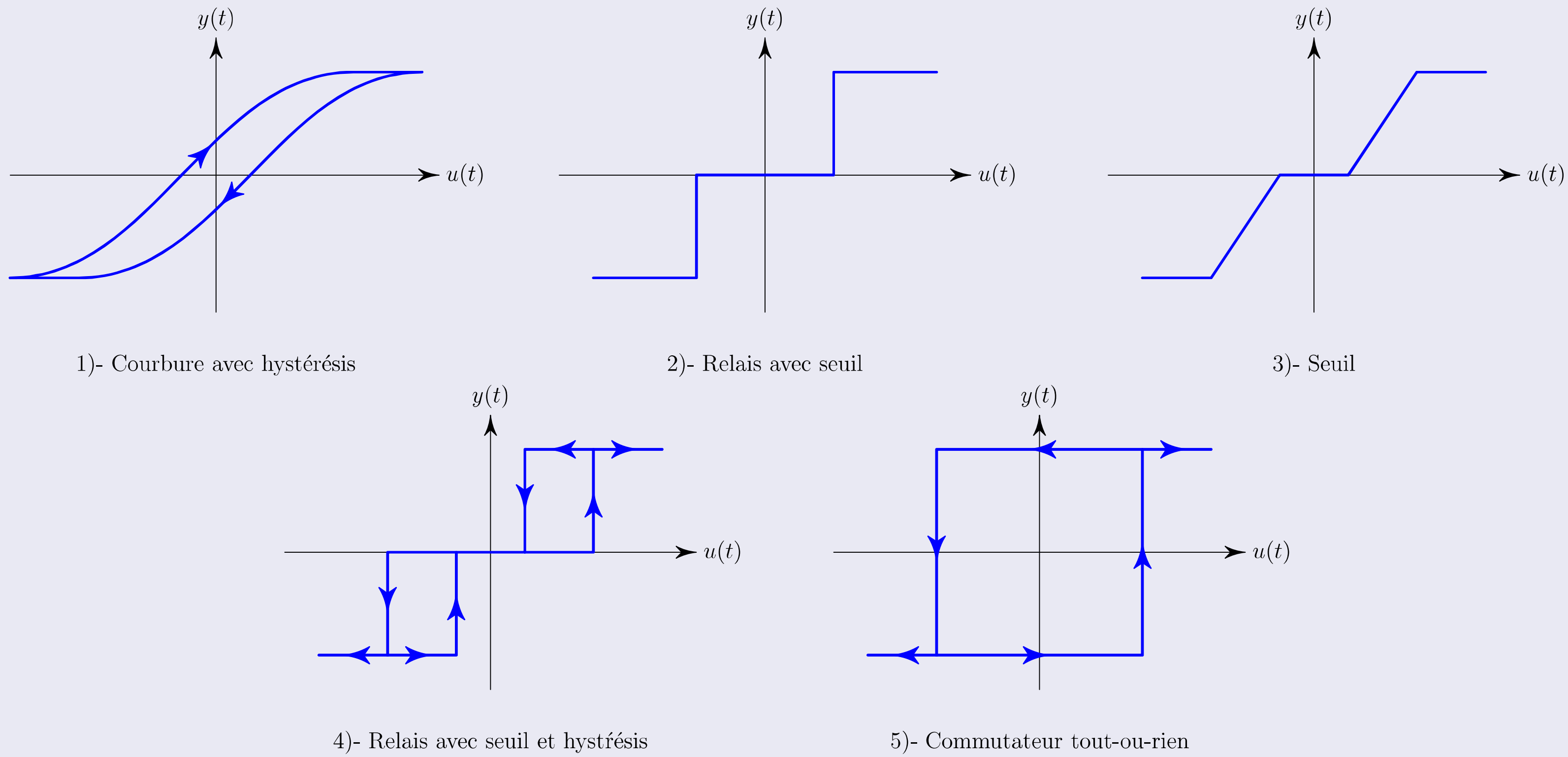

FIGURE 2 – Exemples de non linéarités combinées.

Condition d'existence de la solution

Existence de la solution

On suppose que la fonction $f(x(t),\ t)$ est

1. continue par rapport à ses deux variables ;
2. lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable t and $x(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive L (appelée constante de Lipschitz) telle que

$$||f(x(t),\ t) - f(z(t),\ t)|| \leq L||x(t) - z(t)||, \forall t \in D, \forall x,\ y \in \Re^n, \tag{20}$$

Dans ce cas, la solution $x(t)$ du problème de Cauchy existe, est unique et appartient à $C^1(D)$.

La vérification de l'existence de la solution est importante comme phase de validation. Puisque avant d'étudier ou concevoir une loi de commande, on doit être sûr qu'on a un problème bien posé.

Condition d'existence de la solution

Exemple : fonction lipschitzienne

- Fonction : $f(x) = x^2$, $x \in D = [0,\ 2]$.
- Démonstration :

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x^2 - z^2\| = |x^2 - z^2| \tag{21}$$

$$|x^2 - z^2| = |(x+z)\,(x-z)| \tag{22}$$

$$= |(x+z)|\,|(x-z)| \tag{23}$$

Comme $x \in D = [0,\ 2]$, alors $\max|x+z| = 4$

$$\|f(x) - f(z)\| \leq 4\,|(x-z)| \tag{24}$$

$$\|f(x) - f(z)\| \leq 4\,\|(x-z)\| \tag{25}$$

- Constante de Lipschitz $L = 4$.

Points d'équilibre

Le concept le plus important en analyse des systèmes non linéaires est celui du point d'équilibre.

Point d'équilibre

Un point $x = x_e$ dans l'espace d'état est un point d'équilibre pour le système non linéaire autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{26}$$

si pour $x(t_0) = x_e$ on a $x(t) = x_e, \forall t > t_0$.

D'après la définition, les points d'équilibres du système (26) sont les racines réelles de l'équation $f(x_e) = 0$, c'est-à-dire $x_e \in \Re^n$. En effet, si

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{dx(t))}{dt} = f(x_e) = 0} \tag{27}$$

on déduit que le point x_e est constant, par conséquent d'après la définition, x_e est un point d'équilibre.

Exemple : points d'équilibre

Déterminer les points d'équilibre du système suivant :

$$\dot{x}(t) = r + x^2(t), \quad r \in \Re \tag{28}$$

Pour déterminer les points d'équilibre, on résout l'équation algébrique suivante :

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow f(x_e) = r + x_e^2 = 0 \tag{29}$$

On les trois cas suivant :

- Si $r < 0$, on a deux points d'équilibre $x_e = -\sqrt{r}$ et $x_e = +\sqrt{r}$.
- Si $r = 0$, on a un point d'équilibre $x_e = 0$.
- Si $r > 0$, pas de points d'équilibre (rappelons que x_e doit être un nombre réel).

Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Considérons un point d'équilibre x_e, u_e et y_e et introduisons les variables d'écarts suivantes :

$$\Delta x = x - x_e \tag{30}$$

$$\Delta u = u - u_e \tag{31}$$

$$\Delta y = y - y_e \tag{32}$$

Le modèle linéaire approximant le système non linéaire autonome

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\ u(t)) \tag{33}$$

$$y(t) = h(x(t),\ u(t)) \tag{34}$$

pour des petites variations autour du point d'équilibre est donnée comme suit :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{35}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{36}$$

où

$$A = \nabla_x f|_{x=x_e,\ u=u_e},\ B = \nabla_x f|_{x=x_e,\ u=u_e},\ C = \nabla_u h|_{x=x_e,\ u=u_e},\ D = \nabla_x h|_{x=x_e,\ u=u_e} \tag{37}$$

Linéarisation autour d'un point d'équilibre

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \nabla_u f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\nabla_x h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1} & \frac{\partial h_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \nabla_u h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial h_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_r}{\partial u_1} & \frac{\partial h_r}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Linéarisation : exemple d'application

Linéariser le système suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2^2(t) + x_1(t)u(t) && \Rightarrow f_1 = x_1(t) + x_2^2(t) + x_1(t)u(t) && (40)\\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) && \Rightarrow f_2 = x_1(t) + x_2(t) && (41)\\
y(t) &= x_1(t)\,x_2(t) && \Rightarrow h_1 = h = x_1(t)\,x_2(t) && (42)
\end{aligned}$$

autour du point d'équilibre $x_{1e} = -3$, $x_{1e} = 3$, $u_e = 2$ et $y_e = -3$.

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + {\color{red}u(t)} & 2\,{\color{blue}x_2(t)} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{bmatrix} 1 + {\color{red}2} & 2 \times {\color{blue}3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\nabla_u f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Linéarisation : exemple d'application

$$\nabla_x h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) & x_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix}} \quad (43)$$

$$\nabla_u h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} = [0] \Rightarrow \boxed{D = [0]} \quad (44)$$

Le modèle linéaire est :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (45)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix} x(t) \quad (46)$$

Exo. 1 Considérons le système hydraulique (bac de stockage) de la Figure 3.

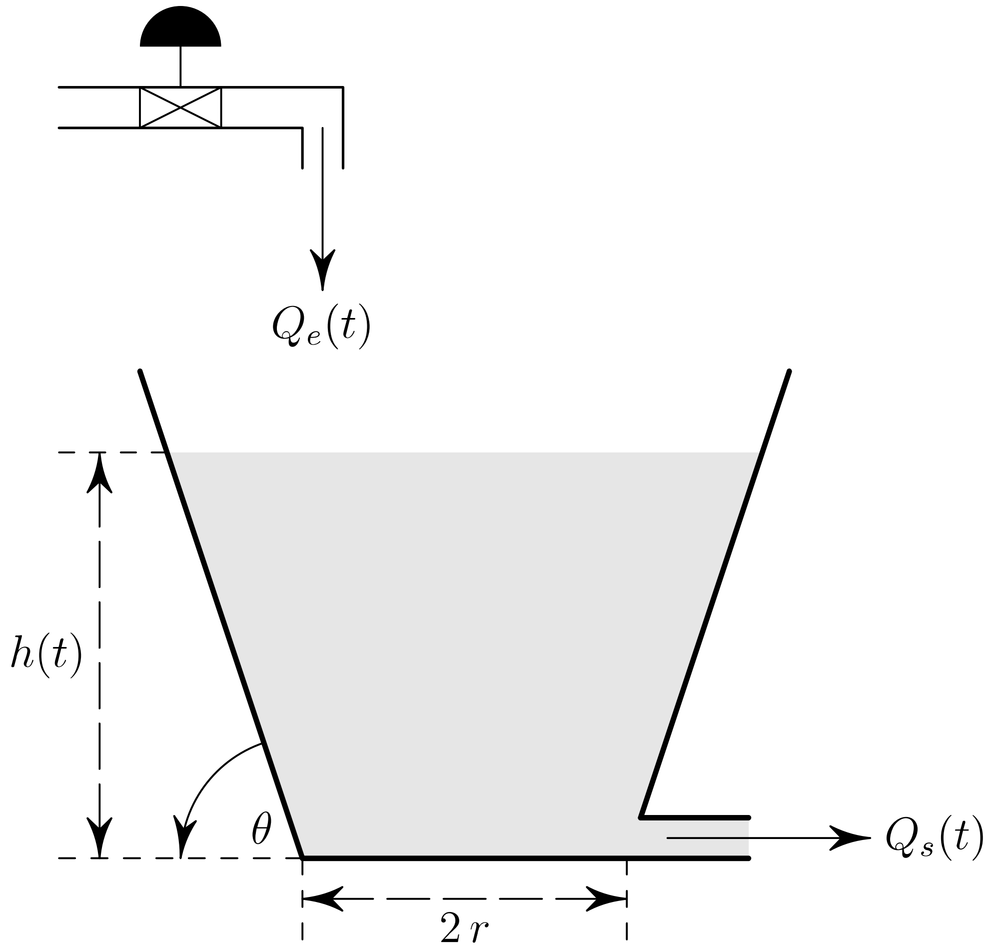

FIGURE 3 – Bac de stockage.

Exercices

Le bac est alimenté par le débit $Q_e(t)$ pour avoir en sortie un débit $Q_s(t)$ qu'on suppose proportionnel à la hauteur $h(t)$ du fluide dans le bac, c'est-à-dire $Q_s(t) = \alpha\, h(t)$. En utilisant le bilan de matière, déterminer le modèle mathématique du bac.

Le volume d'un cône d'une hauteur l et d'une base (disque) de rayon r (Figure 4) est donné par la formule suivante :

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} r^2\, l}$$

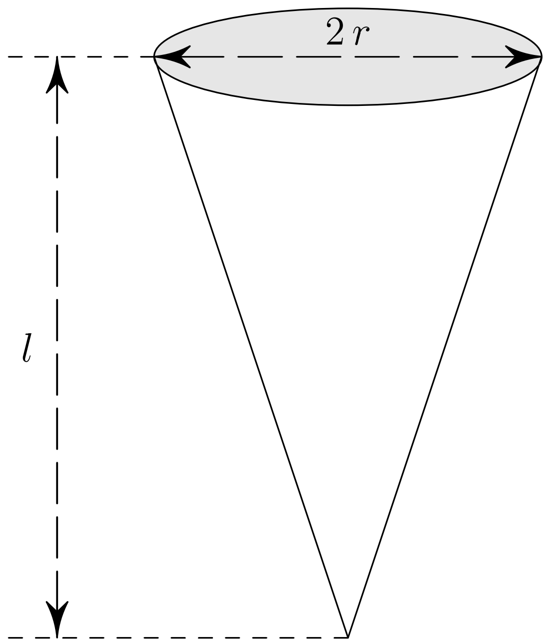

FIGURE 4 – Cône.

Exo. 2 Considérons le circuit électronique de la Figure 6. Le circuit est constitué d'une source d'alimentation en tension U, d'une résistance R, d'une inductance L, d'un condensateur C et d'une diode. La caractéristique $i_D = \Phi(V_D)$ de la diode est donnée par la Figure 5. On demande de préciser le type de la caractéristique de la diode et de déterminer le modèle mathématique du circuit.

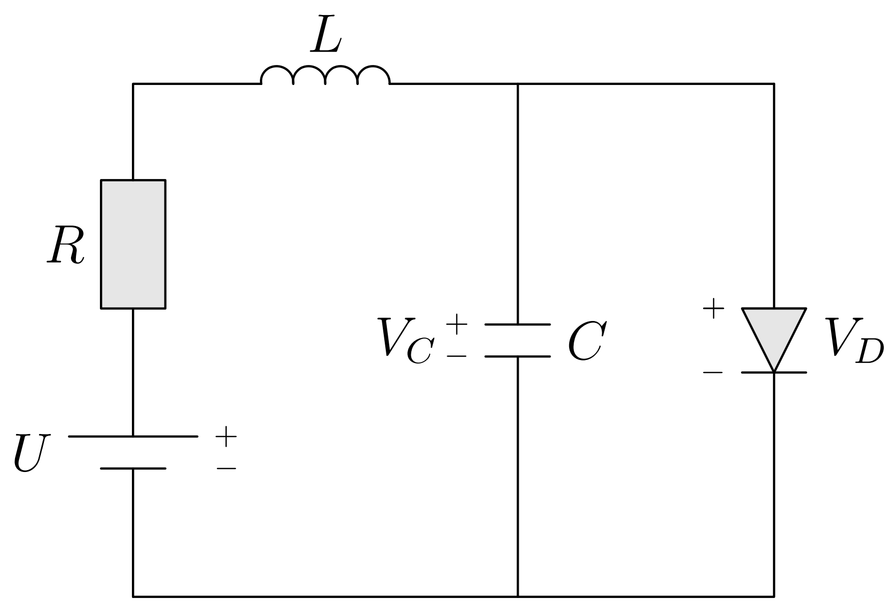

FIGURE 5 – Circuit électronique.

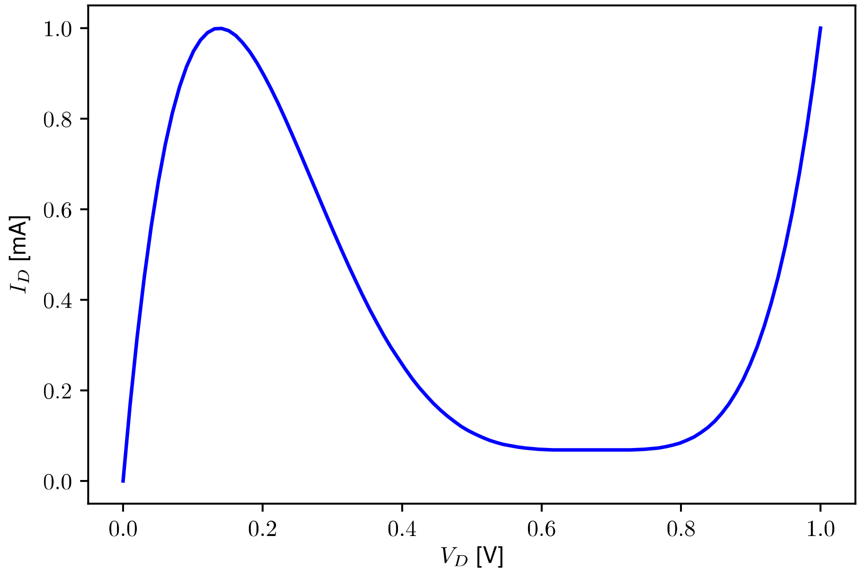

FIGURE 6 – Caractéristique de la diode $I_D = \Phi(V_D)$.

Exo. 3 Démontrer que la fonction $f(x_1,\, x_2)$ est lipschitzienne pour $(x_1,\, x_2) \in [-2,\, 2] \times [-2,\, 2]$.

$$f(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1\, x_2 \\ x_2 - x_1\, x_2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Inégalité de Young

Soit $p \in [1, \infty)$ et $1/p + 1/q = 1$, si $a > 0$ et $b > 0$ alors on a l'inégalité suivante :

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{48}$$

Exo. 4 Soit le système non linéaire non forcé

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) - \mu\,x_1(t)\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) \tag{49}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - \mu\,x_2(t)\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) \tag{50}$$

$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{51}$$

$$y_2(t) = 2\,x_1^2(t) + x_1(t) \tag{52}$$

Linéariser le système autour de ses points d'équilibre.