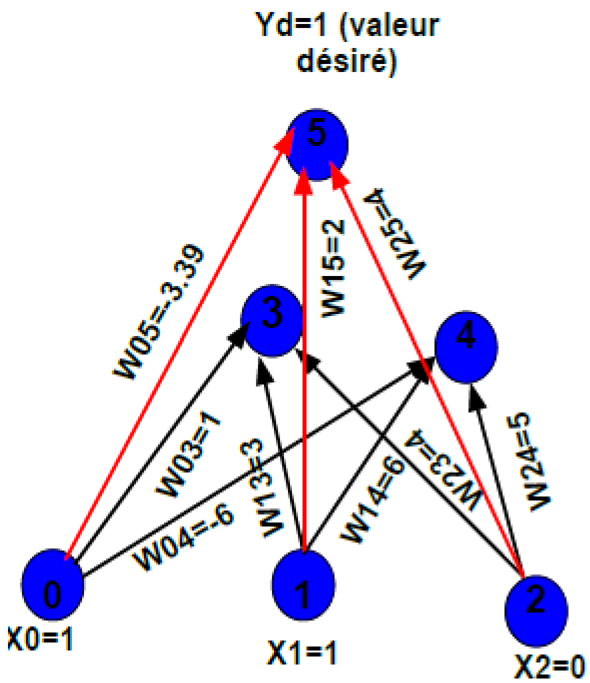
Exercice I

Voici un réseau de neurones multicouches, composé de trois couches (couche d'entrée, couche cachée et une couche de sortie) qui est montré par la figure suivante (Figure **1**) :
La couche d'entrée contient trois neurones, la couche cachée porte deux neurones, et la couche de sortie constitue un seul neurone. La fonction d'activation utilisée est donnée comme suit : $f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$



Figur1 : structure multicouche (trois neurones d'entrées, deux neurones cachés, un neurone de sortie)

Calculer l'erreur de sortie.

Exercice 2

La figure 2 illustre un réseau de neurones multicouches à trois couches (couche d'entrée, couche cachée et la couche de sortie). La couche d'entrée porté deux neurones, la couche cachée aura deux neurones, et la couche de sortie constitue un seul neurone. La fonction d'activation est de type sigmoïde $\left(f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}\right)$

$d_3 = 0.9$ $(valeur\ désirée\ ou\ de\ référence)$
$\tau = 0.25$ $(taux\ d'apprentissage)$
$\alpha = 0.0001$ $(momentum)$

Trouver la valeur minimale de l'erreur après trois itérations ?

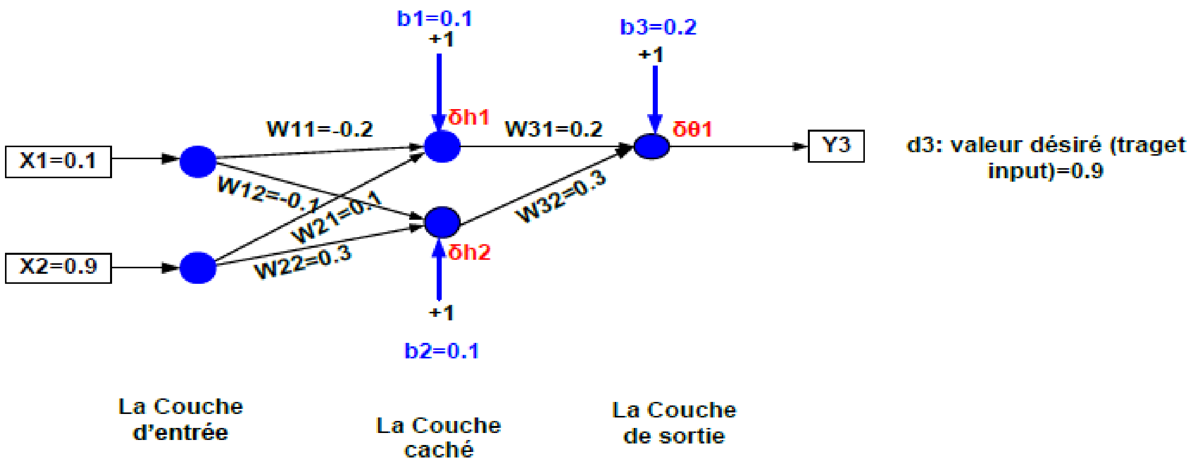


Figure 2: structure multicouche (deux neurones d'entrées, deux neurones cachés, un neurone de sortie)

Exercice 3

La figure 3 montre un réseau de neurones à trois couches (couche d'entrée, couche cachée et la couche de sortie). La couche d'entrée portée deux neurones, la couche cachée aura trois neurones et la couche de sortie constitue un seul neurone.

$d_3 = 0.78$ $(valeur\ désirée\ ou\ de\ référence)$
$\tau = 0.3$ $(taux\ d'apprentissage)$
$\alpha = 0.0001$ $(momentum)$

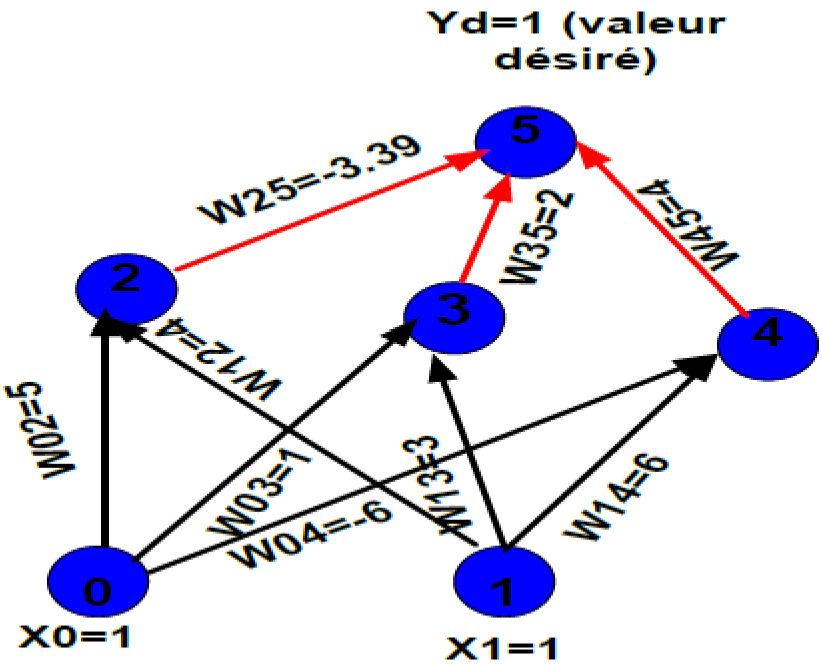


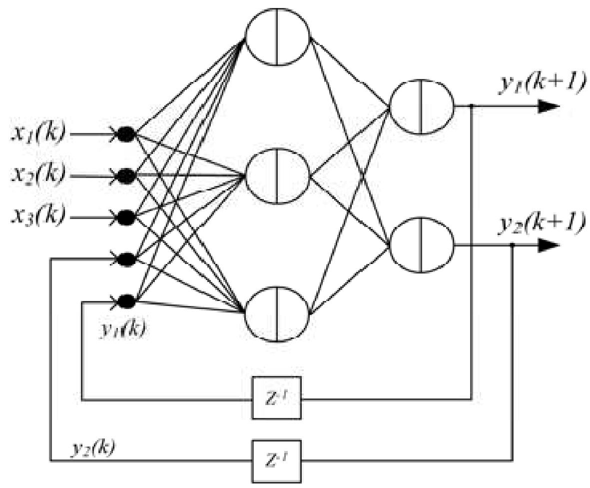
Figure 3: structure multicouche (deux neurones d'entrées, trois neurones cachés, un neurone de sortie).

Trouver la valeur minimale de l'erreur après cinq itérations en utilisant la méthode de Gradient

Exercice 4 (10 pts)

Soit, un réseau de neurones récurrent, représenter sur la figure ci-contre, dont les termes $b_i^l(t)$ et $w_{ij}^l(t)$ désignent respectivement le biais du neurone i de la couche l et le poids de connexion entre le neurone j de la couche l-1 et le neurone i de la couche l. Considérons $g^l(.)$ la fonction d'activation des neurones de la couche l et l'apprentissage se fait à chaque présentation du couple entrée/sortie de l'ensemble d'apprentissage. Le critère de performance à minimiser peut être alors exprimer par :

$$J(t) = 0.5\sum_{i=1}^{N_L}\left(O_i^L(t) - d_i(t)\right)^2$$



Réseau de neurone récurrent

Avec
$J(t)$ est la valeur du critère à l'instant t ; $O_i^L(t)$ est la i^{eme} sortie du réseau à l'instant t et $d_i(t)$ est la i^{eme} sortie désirée à l'instant t. Les paramètres du réseaux sont modifiés suivant la règle du gradient comme suit : $w_{ij}^l(t+1) = w_{ij}^l(t) - \eta\dfrac{\partial J(t)}{\partial w_{ij}^l(t)}$; $\quad b_i^l(t+1) = b_i^l(t) - \eta\dfrac{\partial J(t)}{\partial b_i^l(t)}$

1) Calculer la sortie du neurone i dans la couche l.
2) Déduire les expressions des sorties du réseau.
3) Calculer les quantités $\dfrac{\partial J(t)}{\partial w_{ij}^l(t)}$ et $\dfrac{\partial J(t)}{\partial b_i^l(t)}$

Exercice 5

Soit R un réseau de type multicouche avec deux entrées, une couche cachée avec deux unités et une sortie.

On pose $X = (x, y, x_0)'$ où x_0 représente la constante 1, $W_1 = (w_{1x}, w_{1y}, w_{10})$ et $W_2 = (w_{2x}, w_{2y}, w_{20})$. La sortie du réseau est calculée de la manière suivante :
$c = f(a_1o_1 + a_2o_2 + a_0)$ où $o_1 = f(W_1X)$ et $o_2 = f(W_2X)$
Avec
$f(x) = \frac{1}{1+exp(-x)}$ et $f'(x) = f(x).(1 - f(x))$

Pour une sortie calculée c et une sortie désirée d, la fonction coût est la suivante :

$J = \frac{1}{2}(c - d)^2$

On dispose d'un ensemble d'apprentissage de 50 couples $[(x_i, y_i); d_i]$ d'entrées (x_i, y_i) et de valeurs désirées d_i.

1) Donner le schéma du réseau R
2) Calculer le gradient de la fonction du coût en fonction des paramètres du réseau.
3) Déduire les lois de réajustement des paramètres du réseau, en considérant le pas du gradient $\eta = 0.001$.

Exercice 6

Soit, le robot plan représenté par la figure 4 :

Le modèle géométrique de ce robot est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos(q_1) + L_2 \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin(q_1) + L_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

On utilise un réseau de neurones artificiel (RNA) à 3 couches (une couche d'entrée, une couche cachée et une couche de sortie, avec le nombre de neurones 2 – 4 – 2 respectivement) pour identifier le modèle géométrique de ce robot. Pour structure ce réseau, considérons :

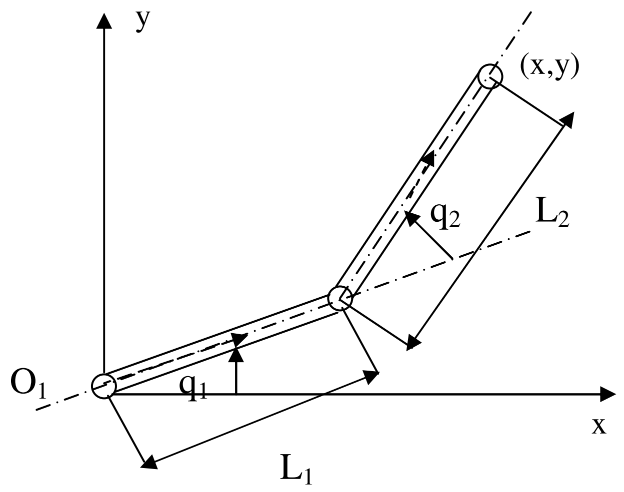


Figure 4 : Robot à deux articulations

- $X = \lfloor q_1, q_2 \rfloor$ le vecteur d'entrée du RNA et $[\hat{x}(k), \hat{y}(k)]$ le vecteur de sortie du RNA.
- $V(i, j)$ représente les poids d'interconnections des neurones de la 1^{ere} couche vers les neurones de la 2eme couche avec i=1,2 et j = 1 .. 4.
- $W(j,k)$ 1 à 6, représente les poids d'interconnections des neurones de la 3eme couche vers les neurones de la couche de sortie avec k=1,2.
- $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ est la fonction d'activation de chaque neurone des deux couches (cachée et sortie).

1) Donner le schéma du réseau ce RNA.
2) Exprimer les sorties du RNA en fonction du vecteur d'entrée.
3) Soit l'index de performance pour apprentissage de RNA $E = \frac{1}{2}([x(k) - \hat{x}(k)]^2 + [y(k) - \hat{y}(k)]^2)$.

a) Donner la structure à adopter pour l'identification du modèle géométrique de ce robot.
b) Déterminer les lois de réajustement des poids $W(j,k)$ *et* $V(i, j)$, en considérant le pas du gradient $\eta = 0.001$.