Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
S6, section B

Année 2019/2020

Systèmes asservis échantillonnés: Le corrigé de la série de TD n°4

Ex.#1 On considère le système continu de fonction de transfert

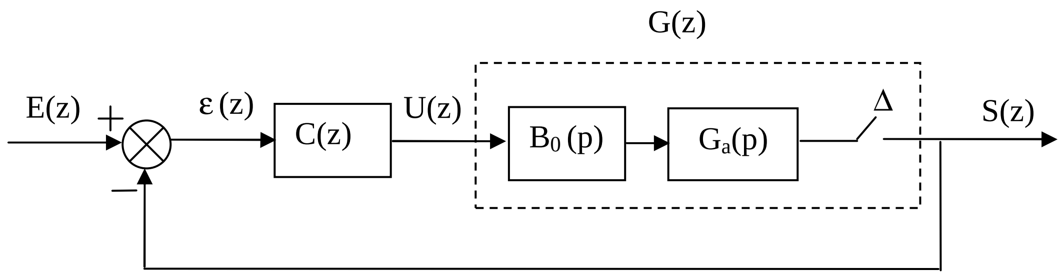
$$G(p) = \frac{1}{p}$$

Un correcteur analogique a été conçu pour le système, son expression est donnée comme suit :

$$C(p) = \frac{0.25}{p+1}$$

On décide de mettre en œuvre une régulation numérique et on choisit une période d'échantillonnage $\Delta = 1s$.

1) La boucle d'asservissement numérique est donnée par la figure suivante



Où : C(z) est la fonction de transfert du régulateur numérique.

2) Calcul du régulateur numérique obtenu par la discrétisation de C(p) en utilisant l'approximation de Tustin $\Rightarrow p = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$.

En remplaçant la variable de Laplace p dans C(p) par $p = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$, avec $\Delta = 1s$, on obtient :

$$C(z) = \frac{0.25(z+1)}{3z-1} = \frac{0.083(z+1)}{z-0.33}$$

3) Calcul des 5 premiers échantillons de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire.

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$$

- Calcul de G(z)

$$G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathrm{Res}(0) = \frac{\Delta}{z-1}$$

En remplaçant Δ par sa valeur, on obtient:

$$G(z) = \frac{1}{z-1}$$

D'où :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.083z + 0.083}{z^2 - 1.25z + 0.413} = \frac{0.083z^{-1} + 0.083z^{-2}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.413z^{-2}}$$

- Détermination de l'équation de récurrence

A partir de la fonction de transfert en boucle fermée, on a :

$$S(z)(1 - 1.25z^{-1} + 0.413z^{-2}) = E(z)(0.083z^{-1} + 0.083z^{-2})$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient :

$$s(k) - 1.25s(k-1) + 0.413s(k-2) = 0.083e(k-1) + 0.083e(k-2)$$

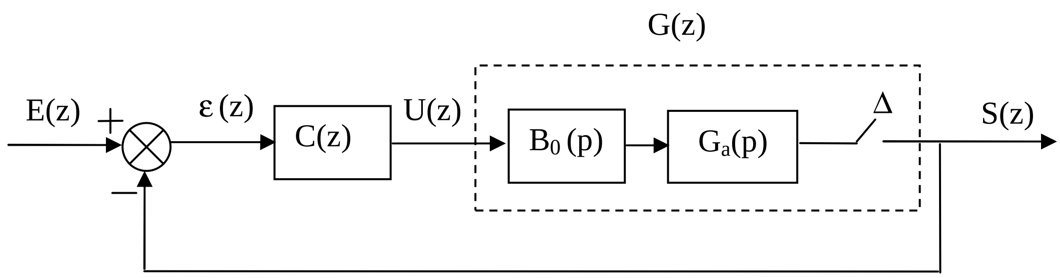
D'où :

$$s(k) = 1.25s(k-1) - 0.413s(k-2) + 0.083e(k-1) + 0.083e(k-2)$$

Alors :

$s(0) = 0,\ s(1) = 0.083,\ s(2) = 0.27,\ s(3) = 0.47,\ s(4) = 0.64$

Ex.#2 Considérons l'asservissement représenté par la figure ci-dessous:



On donne : $G_a(p) = \frac{1}{(p+0.2)(p+1)}$ et $\Delta = 2s$.

1) Détermination du régulateur numérique C(z) qui permet d'avoir en boucle fermée une réponse pile avec un retard d'une période.

1.1 Calcul de G(z)

$$G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{p(p+0.2)(p+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}(\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(-0.2) + \mathrm{Res}(-1))$$

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{p \to 0} p \frac{1}{p(p+0.2)(p+1)} \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \frac{5z}{z-1}$$

$$\mathrm{Res}(-0.2) = \lim_{p \to -0.2} (p+0.2) \frac{1}{p(p+0.2)(p+1)} \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = -\frac{z}{0.16(z - e^{-0.2\Delta})} = -\frac{6.25z}{(z - e^{-0.2\Delta})}$$

$$\mathrm{Res}(-1) = \lim_{p \to -1} (p+1) \frac{1}{p(p+0.2)(p+1)} \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \frac{z}{0.8(z - e^{-\Delta})} = \frac{1.25z}{(z - e^{-\Delta})}$$

$$G(z) = \frac{(-6.25e^{-0.2\Delta} + 1.25e^{-\Delta} + 5)z + 5e^{-1.2\Delta} - 6.25e^{-\Delta} + 1.25e^{-0.2\Delta}}{z^2 - (e^{-0.2\Delta} + e^{-\Delta})z + e^{-1.2\Delta}}$$

En remplaçant Δ par sa valeur on trouve

$$G(z)=\frac{0.9797z+0.4456}{z^2-0.8057z+0.0907}$$

1.2 Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

$$F(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$$

1.3 Calcul du régulateur permettant d'avoir en boucle fermée une réponse pile avec un retard d'une période.

Une réponse pile avec un retard d'une période signifie que la sortie est l'entrée retardée d'une période $\Rightarrow s(k)=e(k-1)$ (*)

La fonction de transfert désirée en boucle fermée est obtenue en appliquant la TZ à (*), d'où :

$$F_d(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=z^{-1}=\frac{1}{z}$$

On détermine le régulateur C(z) pour avoir F(z)=F_d(z), i.e :

$$\frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}=F_d(z)$$

D'où :

$$C(z)=\frac{F_d(z)}{G(z)(1-F_d(z))}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{0.9797z+0.4456}{z^2-0.8057z+0.0907}(1-\frac{1}{z})}=\frac{1.021z^2-0.8224z+0.0926}{z^2-0.5451z+0.4549}$$

Le régulateur est réalisable, parce que le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur.

Remarque : un régulateur est réalisable si le degré du numérateur est inferieur ou égal à celui du dénominateur.

2) On suppose C(z)=K, avec K>0. Déterminer ce régulateur pour avoir une erreur de position égale à 0.1.

L'expression de l'erreur est: $\varepsilon(z)=\frac{E(z)}{1+C(z)G(z)}=\frac{E(z)}{1+KG(z)}$

Erreur de position $\Rightarrow E(z)=\frac{E_0 z}{z-1}$

$$\varepsilon_p(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\varepsilon(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+KG(z)}=\frac{E_0}{1+KG(1)}=\frac{E_0}{1+5K}$$

On pose $\frac{E_0}{1+5K}=0.1$, d'où

$$K=\frac{E_0-0.1}{0.5}$$

Si $E_0=1$ (échelon unitaire) $\Rightarrow K=1.8$.

3) Détermination de la valeur de K pour que le système soit stable en utilisant le critère de Jury.

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{KG(z)}{1+KG(z)}=\frac{K(0.9797z+0.4456)}{z^2+(K\,0.9797-0.8057)z+0.0907+K0.4456}$$

Le polynôme caractéristique (dénominateur de F(z)) de l'asservissement est donné par:

$$D(z)=z^2+(K\,0.9797-0.8057)z+0.0907+K0.4456$$

Les coefficients de D(z) sont : $a_2=1,\ a_1=0.9797K-0.8057,\ a_0=0.0907+K0.4456$

Selon le critère de Jury, l'asservissement est stable si :

D(1)>0 $\Rightarrow$ 1.4253K+0.285>0 $\Rightarrow$ K>-0.2

D(-1)>0 $\Rightarrow$ 1.8964- 0.5341K>0 $\Rightarrow$ K<3.5506

$$|a_0|<a_2 \Rightarrow |0.0907+K0.4456|<1 \Rightarrow -2.4477<K<2.04$$

L'intersection des intervalles donne : 0<K<2.04

Donc le système est stable si : 0<K<2.04

Ex.#3 On souhaite commander le système analogique suivant :

$$G_a(p)=\frac{7}{(1+0.3p)}$$

en utilisant un régulateur PI numérique calculé par la discrétisation d'un régulateur PI analogique de fonction de transfert:

$$C_a(p)=K\left(1+\frac{1}{Tip}\right)$$

Avec : Ti=0.3s, K=0.43.

Le schéma de l'asservissement est le même que celui de l'exercice 1 et 2.

1) Calcul du régulateur numérique C(z) par la discrétisation de $C_a(p)$, $\Delta=0.01s$.

$$C(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{C_a(p)}{p}\right\}$$

$$\frac{C_a(p)}{p}=\frac{K}{p}+\frac{K}{Ti\,p^2}=\frac{0.43}{p}+\frac{0.43}{0.3p^2}$$

Alors :

$$Z\left\{\frac{C_a(p)}{p}\right\}=Z\left\{\frac{0.43}{p}\right\}+Z\left\{\frac{0.43}{0.3p^2}\right\}=0.43Z\left\{\frac{1}{p}\right\}+1.43Z\left\{\frac{1}{p^2}\right\}=\frac{0.43z}{z-1}+\frac{1.43\Delta z}{(z-1)^2}=\frac{0.43z}{z-1}+\frac{0.0143z}{(z-1)^2}$$

D'où :

$$C(z)=\frac{z-1}{z}\left(\frac{0.43z}{z-1}+\frac{0.0143z}{(z-1)^2}\right)=\frac{0.43z-0.4157}{z-1}$$

2) Déterminer les 4 premiers échantillons de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire.

2.1 Calcul de G(z)

$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{7}{p(1+0.3p)}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{23.33}{p(p+\frac{1}{0.3})}\right\}=\frac{z-1}{z}(\mathrm{Res}(0)+\mathrm{Res}(-\frac{1}{0.3})$$

On obtient :

$$G(z)=\frac{0.2295}{z-0.9672}$$

2.2 Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

$$F(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}=\frac{0.0987z-0.0954}{z^2-1.869z+0.8718}=\frac{0.0987z^{-1}-0.0954z^{-2}}{1-1.869z^{-1}+0.8718z^{-2}}$$

2.3 Calcul de l'équation de récurrence et des échantillons

A partir de la fonction de transfert, nous avons :

$$S(z)(1-1.869z^{-1}+0.8718z^{-2})=E(z)(0.0987z^{-1}-0.0954z^{-2})$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient l'équation de récurrence suivante

$$s(k)-1.869s(k-1)+0.8718s(k-2)=0.0987e(k-1)-0.0954e(k-2)$$

Les 4 premiers échantillonnant sont donnés comme suit :

s(0)=0 ;   s(1)=0.0987 ;   s(2)=0.1877 ;   s(3)=0.2679 ;   s(4)=0.3403.

3) Calcul de l'expression de la loi de commande u(k) à programmer sur l'ordinateur

On a :

$$C(z)=\frac{U(z)}{\varepsilon(z)}=\frac{0.43z-0.4157}{z-1}=\frac{0.43-0.4157z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

D'où :

$$U(z)(1-z^{-1})=\varepsilon(z)(0.43-0.4157z^{-1})$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient l'équation de récurrence du régulateur

$$u(k)-u(k-1)=0.43\varepsilon(k)-0.4157\varepsilon(k-1)$$

La loi de commande à programmer sur l'ordinateur est :

$$u(k)=u(k-1)+0.43\varepsilon(k)-0.4157\varepsilon(k-1)$$

4) Etudier la précision en régime permanent (la consigne est un échelon d'amplitude E_0).

L'expression de l'erreur est: $\varepsilon(z)=\dfrac{E(z)}{1+C(z)G(z)}$

Avec : $C(z)G(z)=\dfrac{0.2295(0.43z-0.4157)}{(z-0.9672)(z-1)}$

$$E(z)=\frac{E_0z}{z-1}$$

Alors:

$$\varepsilon_p(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\varepsilon(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+C(z)G(z)}=\frac{E_0}{1+\infty}=0$$

L'erreur statique de position est nulle parce que la fonction de transfert en boucle ouverte C(z)G(z), contient un intégrateur.

Ex.#4 La fonction de transfert d'un processus analogique du premier ordre, muni de son BOZ et échantillonné au pas Δ, s'écrit:

$$G(z) = K\frac{1-a}{z-a}\text{, avec } a = e^{-\Delta/T}$$

K et T sont respectivement le gain et la constante de temps du système analogique.

Le correcteur numérique choisi est du type PI dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(z) = \frac{K_s}{1-z_0}\,\frac{z-z_0}{z-1} \text{ avec } z_0 = 1-\frac{\Delta}{T_i} \text{ et } K_s = K_c\frac{\Delta}{T_i}$$

K_c et T_i sont les paramètres du correcteur analogique correspondant.

Avec : $G(z) = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{K}{p(1+Tp)}\right\}$ et $C(z) = \frac{z-1}{z}Z\left\{K_c\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{T_i p^2}\right)\right\}$

1) Quelle valeur à choisir pour z_0 afin de compenser le pôle du processus ?

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par

$$GBO(z) = C(z)G(z) = \frac{K_s}{1-z_0}\,\frac{z-z_0}{z-1}\,K\frac{1-a}{z-a}$$

Ainsi la compensation de pôle est assurée pour $z_0 = a$.

2) Détermination de la valeur de T_i qui assure cette compensation

A partir de $z_0 = a$, on obtient :

$$1-\frac{\Delta}{T_i} = e^{-\Delta/T}$$

D'où : $T_i = \dfrac{\Delta}{1-e^{-\Delta/T}}$

3) Détermination de la fonction de transfert en boule fermée et la constante de temps T' du système analogique équivalent

On a : $F(z) = \dfrac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$

avec: $C(z)G(z) = \dfrac{K_s K}{z-1}$

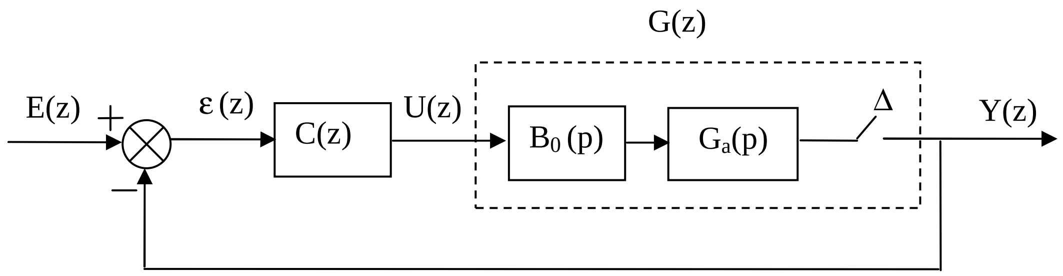
D'où : $F(z) = \dfrac{K_s K}{z-(1-K_s K)} = \dfrac{K_s K}{z-e^{-\Delta/T'}}$

Alors : $e^{-\Delta/T'} = 1-K_s K$

La constante de temps T' du système analogique équivalent est donc égale à

$$T' = \frac{-\Delta}{Ln(1-K_s K)}$$

Ex.#5 On considère un système retardé dont le modèle est $G_a(p) = \dfrac{e^{-2p}}{1+6p}$ que l'on souhaite piloter à l'aide d'un correcteur PID numérique de type RST.
On souhaite que le comportement du système en boucle fermée soit du second ordre avec $h = 0.5$ et $\omega_n = 0.363\,rad/s$. La période d'échantillonnage $\Delta = 2s$.
1) Déterminer les polynômes R, S et T permettant de répondre au cahier des charges.
Dans la structure RST de régulateur PID numérique, le polynôme $S(z) = T(z)$. Le schéma de l'asservissement est donné par la figure suivante :



Avec :

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+r_1 z^{-1})}$$

1.1) Calcul de la fonction de transfert échantillonnée désirée $F_d(z)$

La fonction de transfert analogique désirée est : $F_{da}(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2h}{\omega_n}p + \dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$

Avec : K est le gain statique, h: coefficient d'amortissement, ω_n : pulsation propre (rad/s).

Alors la fonction de transfert désirée échantillonnée est

$$F_d(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{F_{da}(p)}{p}\right\} = K\frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

Avec : $a_0 = e^{-2h\omega_n\Delta}$, $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-h^2}$, $a_1 = -2\sqrt{a_0}\cos(\omega_p\Delta)$

$$b_0 = a_0 + \sqrt{a_0}\left[h\frac{\omega_n}{\omega_p}\sin(\omega_p\Delta) - \cos(\omega_p\Delta)\right],\quad b_1 = 1 - \sqrt{a_0}\left[h\frac{\omega_n}{\omega_p}\sin(\omega_p\Delta) + \cos(\omega_p\Delta)\right]$$

D'où :

$$F_d(z) = K\frac{0.2012z + 0.1575}{z^2 - 1.125z + 0.484} = K\frac{0.2012z^{-1} + 0.1575z^{-2}}{1 - 1.125z^{-1} + 0.484z^{-2}} = K\frac{0.2012z^{-1} + 0.1575z^{-2}}{P_d(z)}$$

Avec $P_d(z)$ est le polynôme caractéristique désiré en BF.

1.2) Calcul de G(z)

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = z^{-1}\frac{1-z_0}{z-z_0}, \quad z_0 = e^{-\Delta/\tau}$$

Avec $\Delta = 2s$ et $\tau = 6s$, on obtient :

$$G(z) = z^{-1}\ \frac{0.283}{z-0.716} = \frac{0.283z^{-2}}{1-0.716z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

1.3) Calcul de la fonction de transfert en BF

$$F(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$$

1.4) Détermination des polynômes R, S

La détermination des polynômes R, S, i.e, les paramètres r_1, s_0, s_1 et s_2 se fait par la résolution de l'**identité de Bézout** suivante :

$$A(z)R(z)+B(z)S(z) = P_d(z)$$

D'où:

$$1+z^{-1}(r_1-1.716)+z^{-2}(0.716-1.716\,r_1+0.283s_0)+z^{-3}(0.716r_1+0.283s_1)+0.283s_2\,z^{-4} = 1-1.125z^{-1}+0.484z^{-2}$$

Par identification, on obtient:

$$r_1-1.716 = -1.125$$
$$0.716-1.716\,r_1+0.283s_0 = 0.484$$
$$0.716r_1+0.283s_1 = 0$$
$$0.283s_2 = 0$$

Après la résolution du système d'équations ci- dessus, on obtient:

$$r_1 = 0.591$$
$$s_0 = 2.764$$
$$s_1 = -1.495$$
$$s_2 = 0$$

Le régulateur est donc :

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{2.764-1.495z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+0.591z^{-1})}$$

2) Détermination des 4 premiers échantillons de la réponse à un échelon unitaire du système corrigé.

La fonction de transfert en BF est donnée par :

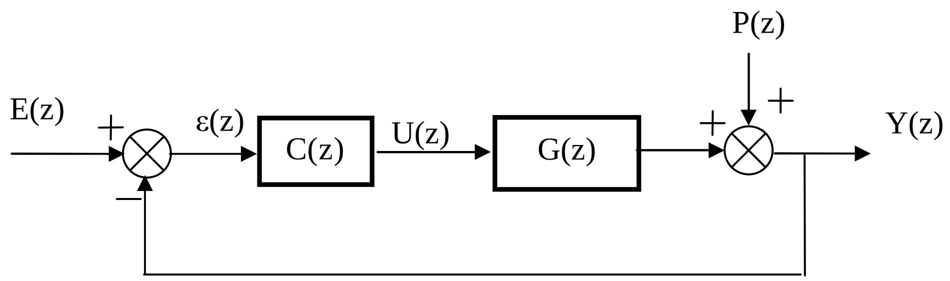
$$F(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{0.782z^{-2}-0.423z^{-3}}{1-1.125z^{-1}+0.484z^{-2}}$$

D’où l’équation de récurrence suivante :

$$y(k) = 1.125y(k-1) - 0.484y(k-2) + 0.782\,e(k-2) - 0.423\,e(k-3)$$

Les échantillons sont donnés comme suit:
$y(0) = 0;\quad y(1) = 0;\quad y(2) = 0.782,\; y(3) = 1.239.$

Ex.#6 Considérons la boucle de régulation numérique suivante :



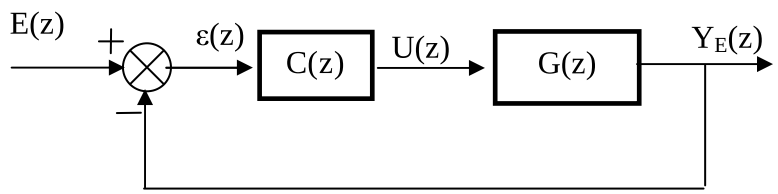
P(z) : est la perturbation

1) Exprimer Y(z) puis $\varepsilon(z)$ en fonction de E(z) et P(z).
1.1) Calcul de Y(z)

$$Y(z)=Y_E(z)+ Y_P(z)$$

$Y_E(z)$: la sortie due à la consigne E(z) quand la perturbation est supposée nulle (la dynamique en poursuite ou en asservissement).
$Y_P(z)$: la sortie due à la perturbation P(z) quand la consigne est supposée nulle (la dynamique en régulation ou de rejet de perturbation).

Calcul de $Y_E(z)$ (on pose P(z)=0) :
Quand P(z)=0, le schéma devient :

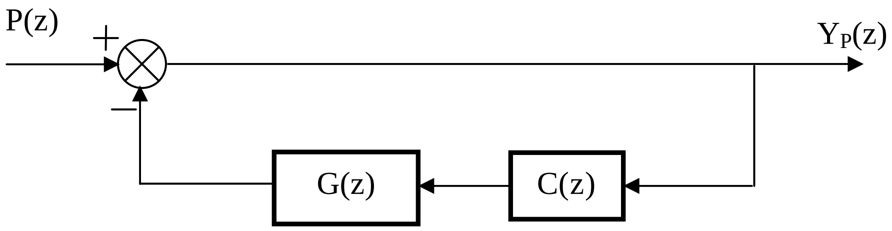


Sa fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Y_E(z)}{E(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}$$

Alors : $Y_E(z) = \dfrac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} E(z)$

Calcul de $Y_P(z)$ (on pose E(z)=0) :
Quand E(z)=0, le schéma devient :



Sa fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Y_P(z)}{P(z)} = \frac{1}{1+C(z)G(z)}$$

Alors :

$$Y_P(z) = \frac{1}{1+C(z)G(z)} P(z)$$

D’où: $Y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} E(z) + \frac{1}{1+C(z)G(z)} P(z)$

Dans l’expression ci-dessus, il y’a deux fonctions de transfert. L’une décrit la dynamique en asservissement (P(z)=0) et l’autre décrit la dynamique en régulation (E(z)=0).

1.2) Calcul de $\varepsilon(z)$

On a : $\varepsilon(z) = E(z) - Y(z)$

Alors : $\varepsilon(z) = \frac{1}{1+C(z)G(z)} E(z) - \frac{1}{1+C(z)G(z)} P(z)$

Soit : $Y(z) = F_E(z)E(z) + F_P(z)P(z)$

2) Quels doivent être les gains statiques de $F_E(z)$ et $F_P(z)$ pour que l’erreur statique de position soit nulle ?

La fonction de transfert en poursuite est donnée par :

$$F_E(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{1}{1+\frac{1}{C(z)G(z)}}$$

La fonction de transfert en régulation est donnée par :

$$F_P(z) = \frac{1}{1+C(z)G(z)}$$

L’erreur de position en régime permanent pour une perturbation en échelon est donnée par :

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{1+C(z)G(z)} E(z) - \frac{1}{1+C(z)G(z)} P(z)\right)$$

Avec $E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$ et $P(z) = \frac{P_0 z}{z-1}$, on obtient :

$$\varepsilon_P(\infty) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{E_0}{1+C(z)G(z)} - \frac{P_0}{1+C(z)G(z)}\right)$$

L'erreur statique est nulle si $\lim\limits_{z\to 1} C(z)G(z) = \infty$. Cela implique que le gain statique de $F_E(z)$ est égal à 1, i.e, $F_E(1) = 1$ et le gain statique de $F_P(z)$ est nul, i.e, $F_P(1) = 0$.

Donc la fonction de transfert en boucle ouverte C(z)G(z) doit comporter au moins un intégrateur (pôle z=1).

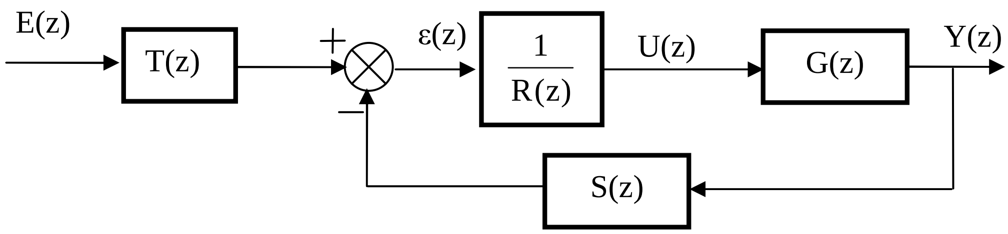
Ex.#7 On considère un système retardé dont le modèle est $G_a(p) = \dfrac{3e^{-0.5p}}{1+5p}$ que l'on souhaite piloter à l'aide d'un correcteur RST. La période d'échantillonnage $\Delta = 0.6$s.

On souhaite que le comportement du système en boucle fermée soit du second ordre avec :

- un gain statique égal à 1.
- $h = 0.7$ pour $\omega_n \Delta = 1$.

1) Détermination des polynômes R(z), S(z) et T(z) permettant de répondre au cahier des charges.

Le schéma de l'asservissement est montré par la figure suivante :



1.1) Calcul de G(z)

Le retard τ est inférieur à la période d'échantillonnage Δ: $\tau = 0.5 < \Delta$

$$\tau = (1-m)\Delta \rightarrow m = 1 - \frac{0.5}{0.6} = 0.1667$$

Alors :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = z^{-1} K_1 \frac{z-\alpha}{z-z_0},$$

Avec $z_0 = e^{-\Delta/T}, \alpha = \dfrac{z_0 - z_0^m}{1-z_0^m}$, $K_1 = K(z - z_0^m)$.

T : est la constante de temps du système analogique égale à 5s.

K : est le gain statique, avec K=3.

D'où :

$$G(z) = 0.0594\frac{z+4.7106}{z(z-0.8869)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

On constate que le zéro de G(z) (-4.7106) est de module supérieur à 1, donc il est instable. Cela signifie qu'il n'est pas compensable par un pôle du correcteur.

Le processus G(z) est de type P_3. On choisit donc un régulateur de type RST.

La méthode de synthèse du régulateur est comme suit (voir le cours) :
B(z) peut être décomposé comme suit :

$$B(z) = B_i(z)B_s(z)$$

Avec $B_i(z)$ et $B_s(z)$ sont les parties à zéros stables et instables, données comme suit :

$$B_i(z) = z + 4.7106, \text{ et } B_s(z) = 0.0594$$

Le modèle désiré en BF est d'ordre 2, donné comme suit,

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Le dénominateur est donné comme suit :

$$A_m(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

Avec : $a_0 = e^{-2h\omega_n\Delta}$, $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-h^2}$, $a_1 = -2\sqrt{a_0}\cos(\omega_p\Delta)$.

Pour h=0.7 et $\omega_n\Delta = 1$, on obtient : $a_1 = -0.75$ et $a_0 = 0.25$.

Le numérateur $B_m(z)$ est du premier ordre et doit contenir la partie instable $B_i(z)$.

Comme le gain statique de $H_m(z)$ doit être égal à 1, on aura

$$H_m(z) = 0.0876\frac{(z + 4.7106)}{z^2 - 0.75z + 0.25}$$

Alors $B_m(z) = B_i(z)B'_m(z)$, avec $B'_m(z) = 0.0876$.

Le polynôme T(z) est donné par :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) = 0.0876A_0(z).$$

Le polynôme $A_0(z)$ doit respecter la relation suivante :

$$\deg\text{ré }(A_0(z)) \geq 2\deg\text{ré }(A(z)) - \deg\text{ré }(A_m(z)) - \deg\text{ré}(B_s(z)) + i - 1$$

i: indique le nombre d'intégrateurs. Comme $H_m(z)$ a un gain statique de 1, nous devons donc avoir une intégration en boucle ouverte, i.e, i=1.

Alors, le degré de $A_0(z)$ est donné comme suit :

2x2-2-0+1-1=2

Donc, on prendra $A_0(z) = z^2$, alors :

$$T(z) = 0.0876z^2$$

Le polynôme R(z) est défini comme suit:

$$R(z) = (z-1)^i B_s(z)R'(z) = (z-1)0.0594R'(z)$$

Avec : $\deg\text{ré }(R'(z)) = \deg\text{ré}(A_0(z)) + \deg\text{ré }(A_m(z)) - \deg\text{ré }(A(z)) - i = 1$

Alors : $R'(z) = z + r_0$

On a : $\deg\text{ré }(S(z)) < \deg\text{ré }(A(z)) + i < 2 + 1$

On prendra donc S(z) de degré 2.

D'où : $S(z)=s_2 z^2+ s_1 z+s_0$

L'équation de Bézout est donnée par :

$$A(z)(z-1)^i R'(z) + B_i(z)S(z) = A_m(z)A_0(z)$$

Il vient :

$$z(z-0.8869)(z-1)(z+r_0)+(z+4.7106)(s_2z^2+s_1z+s_0)=(z^2-0.75z+0.25)z^2$$

Par identification, on obtient :

$$r_0+s_2=1.1369$$

$$-1.8869r_0+4.7106s_2+s_1=-0.6369$$

$$0.8869r_0+4.7106s_1=0$$

$$s_0=0$$

On en déduit : $s_0=0$, $s_1=-0.1663$, $s_2=0.2539$, $r_0=0.8831$.

Donc les polynômes sont comme suit :

$$R(z)=0.0594(z-1)(z+0.8831)$$

$$S(z)=0.2539z^2-0.1663z$$

$$T(z)=0.0876z^2$$

Remarque : On peut vérifier que la fonction de transfert de l'asservissement est :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}=0.0876\frac{z+4.7106}{z^2-0.75z+0.25}$$

qui est bien le modèle attendu.

2) Déduire la loi de commande à programmer dans l'ordinateur.

La loi de commande s'écrit :

$$R(z)U(z)=T(z)E(z)-S(z)Y(z)$$

D'où :

$$(0.0594z^2-0.0069z-0.0525)U(z)=0.0876z^2E(z)-(0.2539z^2-0.1663z)Y(z)$$

En divisant par $0.0594z^2$, on obtient :

$$U(z)-0.1162z^{-1}U(z)-0.8838z^{-2}U(z)=1.4747E(z)-4.2744Y(z)+2.7997z^{-1}Y(z)$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient :

$$u(k)=0.1162u(k-1)+0.8838u(k-2)+1.4747e(k)-4.2744y(k)+2.7997y(k-1)$$