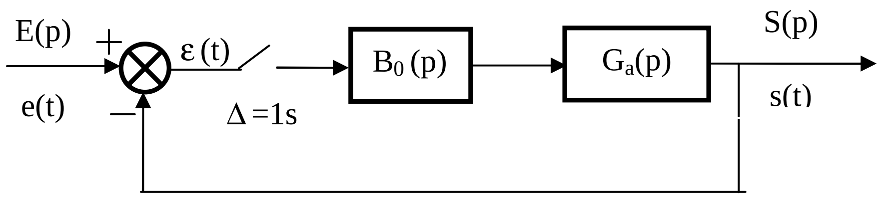
<u>Département Automatique</u>
<u>Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique</u>
S6, section B

Année 2019/2020

Systèmes asservis échantillonnés: Le corrigé de la série de TD n°3

Ex.#1 Considérons le système échantillonné représenté ci-dessous :



Avec :

$G_a(p) = \dfrac{K}{p(p+1)}$, K>0. Δ est la période d'échantillonnage. $B_0(p)$ est la fonction de transfert du Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ), donnée par: $B_0(p) = \dfrac{1-e^{-\Delta p}}{p}$

Soit: $G(p) = B_0(p) G_a(p)$.

1) Calcul de la fonction de transfert échantillonnée de l'asservissement

On a: $F(z) = \dfrac{S(z)}{E(z)} = \dfrac{G(z)}{1+G(z)}$

- Calcul de G(z)

$$G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{K}{p^2(p+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}(\mathrm{Res}(0) + \mathrm{res}(-1)) = K\frac{(-1+\Delta+e^{-\Delta})z + 1 - (1+\Delta)e^{-\Delta}}{z^2 - (1+e^{-\Delta})z + e^{-\Delta}}$$

En remplaçant Δ par sa valeur, on obtient :

$$G(z) = \frac{K(0.37z + 0.26)}{z^2 - 1.37z + 0.37} = \frac{K(0.37z+0.26)}{(z-1)(z-0.37)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(0.37z+0.26)}{z^2 + z(-1.37+0.37K) + 0.37 + 0.26K}$$

2) Calcul de l'erreur de position en régime permanent.

L'expression de l'erreur est: $\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+G(z)}$

Erreur de position $\Rightarrow E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{E(z)}{1+G(z)} = \frac{E_0}{1+G(1)} = \frac{E_0}{1+\infty} = 0$$

Remarque: L'erreur statique de position est nulle car la fonction de transfert en boucle ouverte G(z) contient un intégrateur (un pôle en z=1).

3) Détermination de la valeur de K pour que le système soit stable en utilisant le critère de Jury.

Le polynôme caractéristique (dénominateur de F(z)) de l'asservissement est donné par:

$$D(z) = z^2 + z(-1.37 + 0.37K) + 0.37 + 0.26K$$

Les coefficients de D(z) sont : $a_2 = 1,\ a_1 = -1.37 + 0.37K,\ a_0 = 0.37 + 0.26K$

Selon le critère de Jury, l'asservissement est stable si :

D(1)>0 $\Rightarrow$ 0.63K>0 $\Rightarrow$ K>0

D(-1)>0 $\Rightarrow$ 2.74- 0.11K>0 $\Rightarrow$ K<24.9

$|a_0| < a_2 \Rightarrow |0.37 + 0.26K| < 1 \Rightarrow -5.27 < K < 2.42$

L'intersection des intervalles donne : 0<K<2.42

Donc le système est stable si : 0<K<2.42

Ex.#2 Etude de la stabilité des systèmes dont le polynôme caractéristique est D(z).

1) $D(z) = (z+1.5)(z+0.23)(z-0.89)$

Le système est stable si toutes les racines de D(z) sont de module inférieur à 1.

Les racines de D(z) (pôles du système) sont: $z_1 = -1.5,\ z_2 = -0.23$ et $z_3 = 0.89$.

On constate que le module de z_1 est superieur à 1 ($|-1.5| > 1$), donc le système est instable.

2) $D(z) = z^2 - 0.5z - 0.5$

Les racines de D(z) sont: $z_1 = 1$ et $z_2 = -0.5$.

Le système est dit juste oscillant (astable) à cause du pôle z_1.

3) $D(z) = z^3 + 2.7z^2 + 2.26z + 0.6$

Ici, on utilise le critère de Jury (n=3)

Le système est stable si:

D(1)>0 $\Rightarrow$ D(1)=6.56>0

D(-1)<0 $\Rightarrow$ D(-1)=0.04, n'est pas négatif, donc le système est instable.

4) $D(z) = 2.5z^4 + z^3 + z^2 + 2z + 1$ (n=4)

Selon le critère de Jury, le système est stable si:

D(1)>0 $\Rightarrow$ D(1)=7.5>0

D(-1)>0 $\Rightarrow$ D(-1)=1.5>0

Comme n=4, il y'a trois conditions supplémentaires à vérifier :

$$|a_0| < a_4 \qquad (*)$$
$$|b_0| > |b_3| \qquad (**)$$
$$|c_0| > |c_2| \qquad (***)$$

Avec:

$a_4 = 2.5, a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 1$

- Calcul des paramètres : b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1 et c_2.

Le calcul peut se faire en traçant le tableau de Jury ou directement en utilisant les expressions ci-dessous :

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \text{ et } c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

D'où :

$b_0 = -5.25$, $b_1 = -0.5$, $b_2 = -1.5$, $b_3 = -4$

$c_0 = 11.5625$, $c_1 = -3.375$, $c_2 = 5.875$

Les conditions (*), (**) et (***) sont satisfaites, donc le système est stable.

Ex.#3 Calcul des erreurs statiques (de position, de trainage et d'accélération) des asservissements ayant les fonctions de transfert en boucle ouverte suivantes

L'expression de l'erreur est: $\varepsilon(z) = \dfrac{E(z)}{1 + G(z)}$

L'erreur statique (l'erreur en régime permanent) est la valeur de $\varepsilon(k)$ quand k tend vers l'infini:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z)$$

Erreur statique de position $\varepsilon_p(\infty) \Rightarrow E(z) = \dfrac{E_0 z}{z-1}$

Erreur statique de trainage $\varepsilon_v(\infty) \Rightarrow E(z) = \dfrac{a\Delta z}{(z-1)^2}$

Erreur statique d'accélération $\varepsilon_a(\infty) \Rightarrow E(z) = \dfrac{b\Delta^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

1) $G(z) = \dfrac{6}{4z-1}$

$\varepsilon_p(\infty) = \dfrac{E_0}{3},\ \varepsilon_v(\infty) = \infty,\ \varepsilon_a(\infty) = \infty$

2) $G(z) = \dfrac{2z-0.6}{z^2 - 0.7z + 0.1}$

$\varepsilon_p(\infty) = \dfrac{2E_0}{9},\ \varepsilon_v(\infty) = \infty,\ \varepsilon_a(\infty) = \infty$

3) $G(z) = \dfrac{z^2 + 0.1z - 0.12}{z^3 - 2.4z^2 + 1.8z - 0.4}$

$\varepsilon_p(\infty) = 0,\ \varepsilon_v(\infty) = 0,\ \varepsilon_a(\infty) = \dfrac{3b\Delta^2}{4.9}$