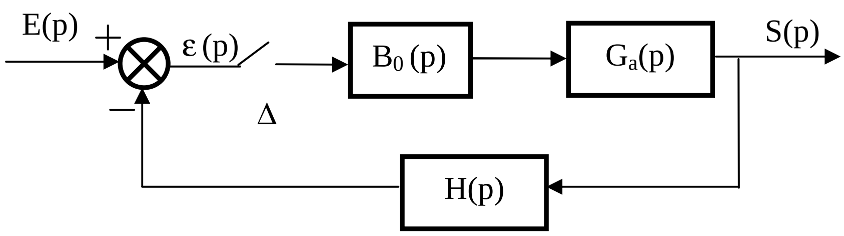
Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
S6, section B

Année 2019/2020

Systèmes asservis échantillonnés: Le corrigé de la série de TD n°2

Ex.#1 Calcul des fonctions de transfert des asservissements échantillonnés suivants :
a)



Soit: $G(p) = B_0(p)\, G_a(p)$.

On a: $S(p)=G(p)\ \varepsilon^*(p)$

En échantillonnant S(p), on obtient:

$S^*(p)=G(p)^*\ \varepsilon^*(p)$

$\varepsilon\ (p)= E(p)- H(p)\, S(p)= E(p) - G(p)H(p)\ \varepsilon^*(p) \ \Rightarrow\ \varepsilon^*(p)= E^*(p)- [G(p)H(p)]^*\ \varepsilon^*(p)$

D'où:

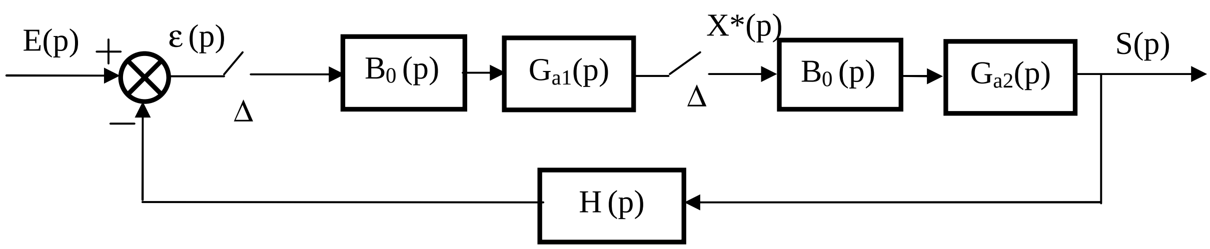
$$\varepsilon^*(p)=\frac{E^*(p)}{1+[G(p)H(p)]^*}$$

En remplaçant $\varepsilon^*(p)$ dans $S^*(p)$, on obtient la fonction de transfert :

$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)}=\frac{G^*(p)}{1+[G(p)H(p)]^*} \Rightarrow \frac{S(z)}{E(z)}=\frac{G(z)}{1+\overline{GH}(z)}$$

Avec $\overline{GH}(z)=Z\{G(p)H(p)\}$ et $G(z)=Z\{G(p)\}$.

b)



Soit : $G_1(p) = B_0(p)\, G_{a1}(p)$ et $G_2(p) = B_0(p)\, G_{a2}(p)$.

On a : $S(p)=G_2(p)\, X^*(p) \;\Rightarrow\; S^*(p)=G_2^*(p)\, X^*(p)$ (*)

$X(p)= G_1(p)\, \varepsilon^*(p)$

En échantillonnant X(p), on obtient :

$X^*(p)= G^*_1(p)\, \varepsilon^*(p)$

En remplaçant X*(p) dans (*), on obtient:

$S^*(p)= G^*_2(p)\, G^*_1(p)\, \varepsilon^*(p)$ (**)

Calculons $\varepsilon^*(p)$:

$$\varepsilon(p)= E(p)- H(p)\, G_2(p)\, X^*(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p)= E^*(p)- [H(p)\, G_2(p)]^*\, X^*(p)$$

$$= E^*(p) - [H(p)\, G_2(p)]^*\, G^*_1(p)\, \varepsilon^*(p)$$

$$\varepsilon^*(p) = \frac{E^*(p)}{1+G^*_1(p)[G_2(p)H(p)]^*}$$

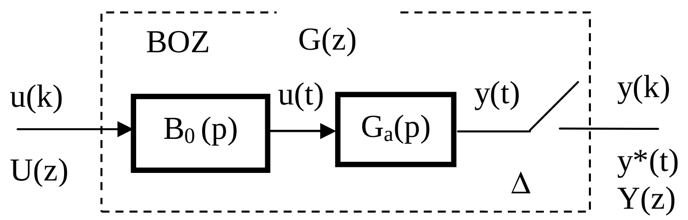
En remplaçant $\varepsilon^*(p)$ dans (**), on obtient :

$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)} = \frac{G_1^*(p)G_2^*(p)}{1+G^*_1(p)[G_2(p)H(p)]^*}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)\overline{G_2H}(z)}$$

Avec : $\overline{G_2H}(z) = Z\{G_2(p)H(p)\}$

Ex.#2 Calcul de la fonction de transfert échantillonnée G(z)



Avec :

$G_a(p) = \frac{5}{1+10p} e^{-2p}$, Δ est la période d'échantillonnage égale à 2s.

La fonction est retardée, le retard r est égal à 2s.

Soit $G'_a(p)$ la fonction non retardée, i.e :

$$G'_a(p) = \frac{5}{1+10p}$$

Soit: $G(p) = B_0(p)G_a(p)$ et $G'(p) = B_0(p)G'_a(p)$.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{G(p)\} = z^{-m} Z\{G'(p)\}$$, avec r=mΔ, alors: m=1.

$$Z\{G'(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G'_a(p)}{p}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{G'_a(p)}{p}\right\} = Z\left\{\frac{5}{p(1+10p)}\right\}$$

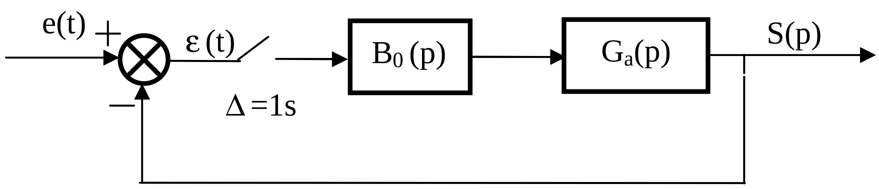
$$Z\left\{\frac{5}{p(1+10p)}\right\} = Z\left\{\frac{0.5}{p(p+\frac{1}{10})}\right\} = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(-\frac{1}{10})$$

$$\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(-\frac{1}{10}) = \lim_{p\to 0} \frac{0.5}{(p+\frac{1}{10})} \frac{z}{z-e^{\Delta p}} + \lim_{p\to -\frac{1}{10}} \frac{0.5}{p} \frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \frac{5z}{z-1} - \frac{5z}{z-e^{-\Delta/10}}$$

D'où :

$$G(z) = z^{-1} \frac{z-1}{z}\left[\frac{5z}{z-1} - \frac{5z}{z-e^{-\Delta/10}}\right] = z^{-1} \frac{5(1-e^{-\frac{\Delta}{10}})}{z-e^{-\frac{\Delta}{10}}} = z^{-1} \frac{0.9063}{z-0.8187}$$

Ex.#3 Considérons le système échantillonné représenté ci-dessous:



Avec : $G_a(p) = \frac{1}{p(p+1)}$, Δ est la période d'échantillonnage.

1. Calcul de la fonction de transfert échantillonnée de l'asservissement: $\frac{S(z)}{E(z)}$

Soit: $G(p) = B_0(p)\, G_a(p)$.

On a: $S(p)=G(p)\ \varepsilon^*(p) \Rightarrow S^*(p)= G^*(p)\ \varepsilon^*(p)$

$\varepsilon(p)= E(p) - S(p) \Rightarrow \varepsilon^*(p)= E^*(p) - S^*(p)$

$S^*(p)= G^*(p)\, E^*(p) - G^*(p)\, S^*(p)$

$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)} = \frac{G^*(p)}{1+G^*(p)} \Rightarrow F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

Avec $G(z) = Z\{G(p)\}$.

- Calcul de G(z)

$$G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\}$$

$$Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = Z\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\} = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{res}(-1)$$

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left[p^2 \frac{1}{p^2(p+1)} \frac{z}{z-e^{\Delta p}}\right] = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left[\frac{z}{(p+1)(z-e^{\Delta p})}\right]$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{-z[(z-e^{\Delta p}) - \Delta e^{\Delta p}(p+1)]}{(p+1)^2 (z-e^{\Delta p})^2} = \frac{-z^2 + (1+\Delta)z}{(z-1)^2}$$

$$\mathrm{Res}(-1) = \lim_{p\to -1} (p+1)\frac{1}{p^2(p+1)} \frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \frac{z}{z-e^{-\Delta}}$$

D’où :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{-z^2+(1+\Delta)z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-\Delta}}\right] = \frac{-z+(1+\Delta)}{(z-1)} + \frac{z-1}{z-e^{-\Delta}}$$

$$= \frac{[-z+(1+\Delta)](z-e^{-\Delta}) + (z-1)^2}{(z-1)(z-e^{-\Delta})} = \frac{(-1+\Delta+e^{-\Delta})z + 1 - (1+\Delta)e^{-\Delta}}{z^2 - (1+e^{-\Delta})z + e^{-\Delta}}$$

En remplaçant Δ par sa valeur, on obtient :

$$G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.3679z + 0.3679}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321}$$

2. Détermination de la réponse lorsque l’entrée est un échelon unitaire.

- Calcul de l’équation de récurrence

On a: $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - z + 0.6321} = \frac{0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.6321z^{-2}}$

D’où:

$$S(z)(1 - z^{-1} + 0.6321z^{-2}) = (0.3679z^{-1} + 0.2642z^{-2})E(z)$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient :

$$s(k) - s(k-1) + 0.6321s(k-2) = 0.3679e(k-1) + 0.2642\,e(k-2)$$

D’où:

$$s(k) = s(k-1) - 0.6321s(k-2) + 0.3679e(k-1) + 0.2642\,e(k-2)$$

$k=0 \qquad s(0)=s(-1)-0.6321s(-2)+0.3679e(-1)+0.2642e(-2)$

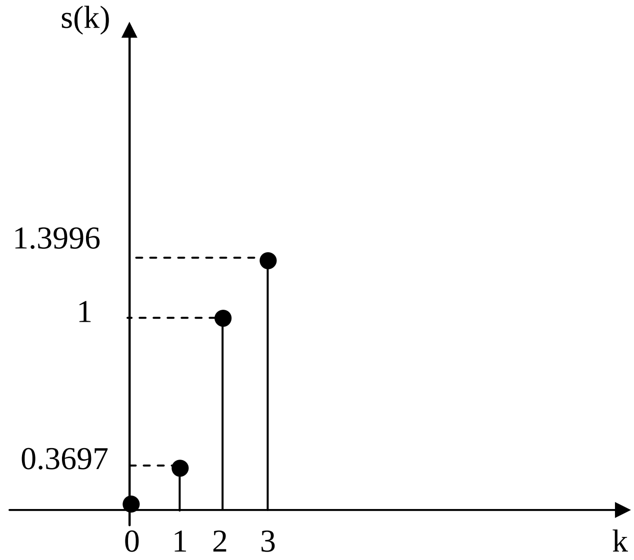
Avec e(k)=0, k<0 et s(k)=0, k<0 (propriété de causalité), on obtient :

s(0)=0

$k=1 \qquad s(1)=s(0)-0.6321s(-1)+0.3697e(0)+0.2642e(-1)=0.3679$

$k=2 \qquad s(2)=s(1)-0.6321s(0)+0.3697e(1)+0.2642e(0)=1$

$k=3 \qquad s(3)=s(2)-0.6321s(1)+0.3697e(2)+0.2642e(1)=1.3996$

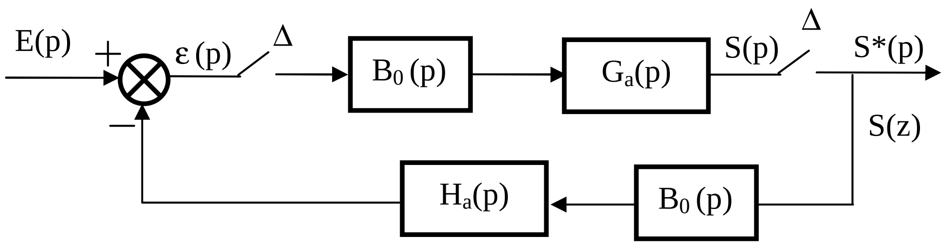


3. Calcul de la valeur finale de la sortie ($s(\infty)$).

Par le théorème de la valeur finale:

$$s(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}S(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-z+0.6321}\,\frac{z}{z-1}=1$$

Ex.#4 Considérons l'asservissement échantillonné représenté ci-dessous:



$$G_a(p)=\frac{0.13}{1+0.16p},\ H_a(p)=\frac{0.4}{1+0.36p},\ \Delta=0.25s.$$

1.Calcul de la fonction de transfert de l'asservissement : $\frac{S(z)}{E(z)}$

Soit : $G(p) = B_0(p)\,G_a(p)$ et $H(p) = B_0(p)\,H_a(p)$.

On a: S(p)=G(p) $\varepsilon^*(p) \Rightarrow$ S*(p)= G*(p) $\varepsilon^*(p)$

ε (p)= E(p)- H(p) S*(p)$\Rightarrow$ ε^* (p)= E*(p)- H*(p) S*(p)

S*(p)[1+G*(p)H*(p)]= G*(p)E*(p)

$$\frac{S^*(p)}{E^*(p)} = \frac{G^*(p)}{1+G^*(p)H^*(p)} \Rightarrow \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Avec $G(z) = Z\{G(p)\}$ et $H(z) = Z\{H(p)\}$.

- Calcul de G(z) et H(z)

Le calcul peut se faire directement en utilisant le résultat démontré en cours, rappelé ci-dessous:

Rappel: Soit $A_a(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, la fonction de transfert d'un système analogique du premier ordre échantillonné et muni d'un BOZ. La fonction de transfert échantillonnée est:

$$A(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{A_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{K}{p(1+\tau p)}\right\} = K\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{z-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}$$

Donc :

$$G(z) = Z\{G(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{0.13}{p(1+0.16p)}\right\} = 0.13\frac{1-e^{-\frac{0.25}{0.16}}}{z-e^{-\frac{0.25}{0.16}}} = \frac{0.1}{z-0.2}$$

$$H(z) = Z\{H(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{H_a(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{0.4}{p(1+0.36p)}\right\} = 0.4\frac{1-e^{-\frac{0.25}{0.36}}}{z-e^{-\frac{0.25}{0.36}}} = \frac{0.2}{z-0.5}$$

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{0.1z-0.05}{z^2-0.7z+0.12}$$

2. Cacul des échantillons s(k), k=0, 1, 2, lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.1z-0.05}{z^2-0.7z+0.12} = \frac{0.1z^{-1}-0.05z^{-2}}{1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2}}$$

$$S(z)(1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2}) = (0.1z^{-1}-0.05z^{-2})E(z)$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient l'équation de récurrence ci-dessous

$$s(k)-0.7s(k-1)+0.12s(k-2) = 0.1e(k-1)-0.05e(k-2)$$

À partir de l'équation de récurrence, on calcule les échantillons comme suit

$k = 0 \qquad s(0) = 0.7s(-1)-0.12s(-2)+0.1e(-1)-0.05e(-2) = 0$

$k=1 \qquad s(1)=0.7s(0)-0.12s(-1)+0.1e(0)-0.05e(-1)=0.1$

$k=2 \qquad s(2)=0.7s(1)-0.12s(0)+0.1e(1)-0.05e(0)=0.02$

$k=3 \qquad s(3)=0.7s(2)-0.12s(1)+0.1e(2)-0.05e(1)=0.002$

3. Calcul de la valeur finale de la réponse impulsionnelle ($s(\infty)$)

$$s(\infty)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}S(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}F(z)E(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}\frac{0.1z-0.05}{z^2-0.7z+0.12}=0$$

4. Détermination de l'expression de la réponse impulsionnelle du système en fonction de k.

$$S(z)=F(z)E(z)=F(z)=\frac{0.1z-0.05}{z^2-0.7z+0.12}=\frac{0.1z-0.05}{(z-0.3)(z-0.4)}$$

$$s(k)=Z^{-1}\{S(z)\}=\mathrm{Res}(0.3)+\mathrm{Res}(0.4)$$

$$\mathrm{Res}(0.3)=\lim_{p\to0.3}(z-0.3)\frac{0.1z-0.05}{(z-0.3)(z-0.4)}z^{k-1}=0.2\,(0.3)^{k-1}$$

$$\mathrm{Res}(0.4)=\lim_{p\to0.4}(z-0.4)\frac{0.1z-0.05}{(z-0.3)(z-0.4)}z^{k-1}=-0.1(0.4)^{k-1}$$

$$s(k)=(0.2\,(0.3)^{k-1}-0.1(0.4)^{k-1})e(k-1)=(\frac{2}{3}\ \ 0.3^k-\frac{1}{4}\ \ 0.4^k)e(k-1)$$

Ex.#5 Détermination de la forme standard qui fait apparaître, le gain, le retard, les intégrateurs, les pôles et les zéros.

1) $G_1(z)=\dfrac{6}{4z-1}=\dfrac{6}{4(z-0.25)}=\dfrac{3}{2(z-0.25)}$

Le gain statique est donné par :
$K=G_1(1)=2$

Alors :

1) $G_1(z)=2\dfrac{3}{4(z-0.25)}=2\dfrac{0.75}{z-0.25}$

2) $G_2(z)=\dfrac{2z-0.6}{z^2-0.7z+0.1}=\dfrac{2(z-0.3)}{z^2-0.7z+0.1}=\dfrac{2(z-0.3)}{(z-0.2)(z-0.5)}$

La fonction ne contient pas d'intégrateurs (un pôle en z=1).
Le gain statique est :
$K=G_2(1)=3.5$, donc :

$$G_2(z)=3.5\frac{2(z-0.3)}{3.5(z-0.2)(z-0.5)}=3.5\ \frac{0.5714\,(z-0.3)}{(z-0.2)(z-0.5)}$$

3) $G_3(z)=\dfrac{2z-0.5}{2z^2-2.4z+0.4}=\dfrac{z-0.25}{z^2-1.2z+0.2}=\dfrac{z-0.25}{(z-1)(z-0.2)}$

La fonction contient un intégrateur. Le gain en vitesse est :

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1)G_3(z) = 0.9375\,.$$

$$G_3(z) = \frac{0.9375}{z-1} \quad \frac{z-0.25}{0.9375(z-0.2)} = \frac{0.9375}{z-1} \quad \frac{1.0667(z-0.25)}{(z-0.2)}$$

Ex.#6 Détermination des gains statiques et des constantes de temps

1) $G_1(z) = \dfrac{3}{z-0.2}$, $\Delta = 0.25s$

K=G_1(1)=3.75

$$e^{-\Delta/\tau} = 0.2 \Rightarrow \tau = \frac{\Delta}{-\ln(0.2)} = 0.16s$$

2) $G_2(z) = \dfrac{5}{z-0.05}$, $\Delta = 1s$

K=G_2(1)=5.26

$$e^{-\Delta/\tau} = 0.05 \Rightarrow \tau = \frac{\Delta}{-\ln(0.05)} = 0.33s$$