Département Automatique
Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique
S6, section B

Année 2019/2020

Systèmes asservis échantillonnés: Le corrigé de la série de TD n°1

Ex.#1 Calculer la Transformée en z (TZ) des fonctions discrètes suivantes

1) $f_1(k) = 0.8^k u(k)$

En utilisant la définition de la transformée en z, on obtient :

$$F_1(z) = Z\{f_1(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0.8^k u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0.8^k z^{-k}$$

Soit $B = 0.8z^{-1}$, d'où :

$$F_1(z) = Z\{f_1(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$$

En utilisant la propriété suivante d'une série géométrique infinie

pour $|x| < 1$, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

On obtient :

$$F_1(z) = Z\{f_1(k)\} = \frac{1}{1-B} = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8}$$

2) $f_2(k) = k\,0.8^k u(k)$

$$F_2(z) = Z\{f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_2(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} k 0.8^k u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} k 0.8^k z^{-k}$$

Soit $B = \frac{z}{0.8}$, d'où :

$$F_2(z) = Z\{f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, B^{-k}$$

On a la propriété suivante qu'on a démontrée en cours (voir le calcul de la TZ de la rampe)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (°)$$

En utilisant la propriété ci-dessus, on obtient :

$$F_2(z) = Z\{f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,B^{-k} = \frac{B}{(B-1)^2}$$

Avec $B = \dfrac{z}{0.8}$, on obtient :

$$F_2(z) = Z\{f_2(k)\} = \frac{0.8z}{(z-0.8)^2}$$

3) $f_3(k) = k\,e^{-5k}u(k)$

$$F_3(z) = Z\{f_3(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_3(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,e^{-5k}u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,e^{-5k}\,z^{-k}$$

Soit $B = e^5 z$, D'où

$$F_3(z) = Z\{f_3(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} kB^{-k}$$

En utilisant la relation (°), on obtient :

$$F_3(z) = Z\{f_3(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,B^{-k} = \frac{B}{(B-1)^2}$$

Avec $B = e^5 z$, on obtient

$$F_3(z) = Z\{f_3(k)\} = \frac{e^5 z}{(e^5 z - 1)^2}$$

Remarque : La TZ de f_3 (k) peut aussi être calculée directement en utilisant la propriété de translation complexe vue en cours.

4) $f_4(k) = (-2)^k\,u(k)$

La TZ de $f_4(k)$ peut être déduite de la TZ de $f_1(k)$, comme suit :
On a :

$$F_1(z) = Z\left\{0.8^k\,u(k)\right\} = \frac{z}{z-0.8}$$

D'où :

$$F_4(z) = Z\left\{(-2)^k\,u(k)\right\} = \frac{z}{z+2}$$

5) $f_5(k) = \cos(\omega kT)u(k)$, T est la période d'échantillonnage.

On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

D'où :

$$\cos(\omega kT) = \frac{e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}}{2}$$

Il en résulte:

$$F_5(z) = Z\{f_5(k)\} = Z\{\cos(\omega kT)u(k)\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}}{2} u(k)\right\} = \frac{1}{2}\left[Z\left\{e^{j\omega kT} u(k)\right\} + Z\left\{e^{-j\omega kT} u(k)\right\}\right]$$

On a démontré en cours que la TZ de la fonction exponentielle est donnée comme suit :

$$Z\{e^{-ak\Delta} u(k)\} = \frac{z}{z - e^{-a\Delta}}$$

D'où :

$$Z\{e^{j\omega kT} u(k)\} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \quad \text{et} \quad Z\{e^{-j\omega kT} u(k)\} = \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}$$

Alors :

$$F_5(z) = Z\{f_5(k)\} = Z\{\cos(\omega kT)u(k)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right]$$

L'expression de $F_5(z)$ peut être simplifiée comme suit :

$$F_5(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right] = \frac{1}{2} \quad \frac{2z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} = \frac{z^2 - \cos(\omega T)z}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1}$$

D'où :

$$F_5(z) = \frac{z^2 - \cos(\omega T)z}{z^2 - 2\cos(\omega T)z + 1}$$

Ex.#2 Pour calculer la TZ des fonctions suivantes, on utilise deux méthodes : la méthode de décomposition en éléments simples et la méthode des résidus.

1) $F_1(p) = \dfrac{1}{(p+2)^3}$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table: La fonction $F_1(p)$ est donnée sous la forme d'un élément simple. Sa transformée en z sera calculée en utilisant la table.

Selon la table des transformées en z usuelles, on a :

$$Z\left\{\frac{1}{(p+a)^3}\right\} = \frac{\Delta^2 e^{-a\Delta} z}{2(z-e^{-a\Delta})^2} + \frac{\Delta^2 e^{-2a\Delta} z}{(z-e^{-a\Delta})^3} = \frac{\Delta^2 e^{-a\Delta} z^2 + \Delta^2 e^{-2a\Delta} z}{2(z-e^{-a\Delta})^3}$$

D'où :

$$F_1(z) = Z\{F_1(p)\} = Z\left\{\frac{1}{(p+2)^3}\right\} = \frac{\Delta^2 e^{-2\Delta} z^2 + \Delta^2 e^{-4\Delta} z}{2(z-e^{-2\Delta})^3}$$

Δ : est la période d'échantillonnage.

Remarque : La table des transformées en z usuelles donnée en cours ne contient pas la TZ de l'élément $\dfrac{1}{(p+a)^3}$, donc il faut l'ajouter.

b) Méthode des résidus

$F_1(p)$ possède un pôle triple : $p = -2$, de multiplicité, $n = 3$.

$F_1(z) = Z\{F_1(p)\} = \mathrm{Res}(-2)$

$$\mathrm{Res}(-2) = \lim_{p\to -2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p+2)^3 F_1(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}}\right]$$

$$\mathrm{Res}(-2) = \lim_{p\to -2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{z}{z-e^{\Delta p}}\right] = \lim_{p\to -2} \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left[\frac{\Delta e^{\Delta p} z}{(z-e^{\Delta p})^2}\right]$$

$$\mathrm{Res}(-2) = \lim_{p\to -2} \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta^2 e^{\Delta p} z (z-e^{\Delta p})^2 + 2(z-e^{\Delta p})\Delta^2 e^{2\Delta p} z}{(z-e^{\Delta p})^4}\right]$$

$$\mathrm{Res}(-2) = \lim_{p\to -2} \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta^2 e^{\Delta p} z (z-e^{\Delta p}) + 2\Delta^2 e^{2\Delta p} z}{(z-e^{\Delta p})^3}\right] = \lim_{p\to -2}\left[\frac{\Delta^2 e^{\Delta p} z^2 + \Delta^2 e^{2\Delta p} z}{2(z-e^{\Delta p})^3}\right]$$

D'où :

$$F_1(z) = \mathrm{Res}(-2) = \frac{\Delta^2 e^{-2\Delta} z^2 + \Delta^2 e^{-4\Delta} z}{2(z-e^{-2\Delta})^3}$$

2) $F_2(p) = \dfrac{p}{p^2 - 1.2p + 0.2}$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

$F_2(p)$ possède 2 pôles simples: $p_1 = 1$ et $p_2 = 0.2$. Alors, $F_2(p)$ peut être écrite comme suit :

$$F_2(p) = \frac{p}{(p-1)(p-0.2)}$$

$F_2(p)$ peut être décomposée comme suit :

$$F_2(p) = \frac{p}{(p-1)(p-0.2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-0.2} = \frac{(A+B)p - 0.2A - B}{(p-1)(p-0.2)}$$

Par identification : $\begin{cases} A + B = 1 \\ -0.2A - B = 0 \end{cases}$ d'où : $A = 1.25,\ B = -0.25$.

D'où :

$$F_2(p) = \frac{1.25}{p-1} - \frac{0.25}{p-0.2}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient:

$$F_2(z) = Z\{F_2(p)\} = 1.25Z\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - 0.25Z\left\{\frac{1}{p-0.2}\right\} = \frac{1.25z}{z - e^{\Delta}} - \frac{0.25z}{z - e^{0.2\Delta}}$$

b) Méthode des résidus

$F_2(p)$ possède 2 pôles simples: $p_1 = 1$ et $p_2 = 0.2$. Alors, $F_2(p)$ peut être écrite comme suit :

$$F_2(p) = \frac{p}{(p-1)(p-0.2)}$$

$$F_2(z) = Z\{F_2(p)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(0.2)$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{p \to 1} (p-1) F_2(p) \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \lim_{p \to 1} \frac{p}{(p-0.2)} \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \frac{1.25z}{z - e^{\Delta}}$$

$$\mathrm{Res}(0.2) = \lim_{p \to 0.2} (p-0.2) F_2(p) \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \lim_{p \to 0.2} \frac{p}{(p-1)} \frac{z}{z - e^{\Delta p}} = -\frac{0.25z}{z - e^{0.2\Delta}}$$

$$F_2(z) = Z\{F_2(p)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(0.2) = \frac{1.25z}{z - e^{\Delta}} - \frac{0.25z}{z - e^{0.2\Delta}} = \frac{z^2 + (-1.25e^{0.2\Delta} + 0.25e^{\Delta})z}{(z - e^{\Delta})(z - e^{0.2\Delta})}$$

3) $F_3(p) = \dfrac{1}{p(1+2p)}$

$F_3(p)$ peut être écrite comme suit :

$$F_3(p) = \frac{1/2}{p(p + \frac{1}{2})}$$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

$F_3(p)$ possède 2 pôles simples: $p_1 = 0$ et $p_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$F_3(p)$ peut être décomposée comme suit :

$$F_3(p) = \frac{1/2}{p(p+\frac{1}{2})} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{2}} = \frac{(A+B)p + 0.5A}{p(p+\frac{1}{2})}$$

Par identification : $\begin{cases} A + B = 0 \\ 0.5A = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où : $A = 1,\ B = -1.$

D'où :

$$F_3(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

$$F_3(z) = Z\{F_3(p)\} = Z\left\{\frac{1}{p}\right\} - Z\left\{\frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right\}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient:

$$F_3(z) = Z\{F_3(p)\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\Delta/2}} = \frac{z(1-e^{-\Delta/2})}{(z-1)(z-e^{-\Delta/2})}$$

b) Méthode des résidus

$F_3(p)$ possède 2 pôles simples: $p_1 = 0$ et $p_2 = -\frac{1}{2}$.

$$F_3(z) = Z\{F_3(p)\} = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(\frac{-1}{2})$$

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{p\to 0} pF_3(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \lim_{p\to 0} \frac{1/2}{(p+\frac{1}{2})}\frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{Res}(\frac{-1}{2}) = \lim_{p\to\frac{-1}{2}} (p+\frac{1}{2})F_3(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}} = \lim_{p\to\frac{-1}{2}} \frac{1/2}{p}\frac{z}{z-e^{\Delta p}} = -\frac{z}{z-e^{-\Delta/2}}$$

$$F_3(z) = Z\{F_3(p)\} = \mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(\frac{-1}{2}) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\Delta/2}} = \frac{z(1-e^{-\Delta/2})}{(z-1)(z-e^{-\Delta/2})}$$

4) $F_4(p) = \frac{1}{p(1+2p)}e^{-\tau p}$, avec : $\tau = m\Delta, m \in N$. Δ est la période d'échantillonnage.

$$F_4(z) = Z\{F_4(p)\} = z^{-m} Z\left\{\frac{1}{p(1+2p)}\right\} = z^{-m} Z\{F_3(p)\} = z^{-m}\frac{z(1-e^{-\Delta/2})}{(z-1)(z-e^{-\Delta/2})}$$

Ex.#3 Pour calculer la TZ inverse des fonctions suivantes, on utilise deux méthodes : la méthode de décomposition en éléments simples et la méthode des résidus.

1) $F_1(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

Le dénominateur de $F_1(z)$ est sous la forme factorisée. On a

$$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

En décomposant $\dfrac{F_1(z)}{z}$ en éléments simples, on obtient :

$$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b}{(z-2)} = \frac{(a+b)z - 2a - b}{(z-1)(z-2)}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$. D'où :

$$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

Il en résulte :

$$F_1(z) = \frac{-z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-2)}$$

$$f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{-z}{(z-1)}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)}\right\}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient la transformée en z inverse de chaque élément, comme suit :

$$f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = (-1 + 2^k)u(k)$$

b) Méthode des résidus

$F_1(z)$ possède deux pôles simples : $z_1 = 1, z_2 = 2$.

$$f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(2)$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)\ (z-2)} z^{k-1} = -1$$

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{(z-1)\ (z-2)} z^{k-1} = 2\ 2^{k-1} = 2^k$$

La TZ inverse de $F_1(z)$ est :

$$f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = (-1 + 2^k)u(k)$$

2) $F_2(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)^2}$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

Le dénominateur de $F_2(z)$ est sous la forme factorisée. On a

$$\frac{F_2(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

En décomposant $\dfrac{F_2(z)}{z}$ en éléments simples, on obtient :

$$\frac{F_2(z)}{z} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b}{(z-2)} + \frac{c}{(z-2)^2} = \frac{(a+b)z^2 + (-4a-3b+c)z + 4a + 2b - c}{(z-1)(z-2)^2}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ -4a-3b+c=1 \\ 4a+2b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$. D'où :

$$\frac{F_2(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2}$$

Il en résulte :

$$F_2(z) = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-2)} + \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$f_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)}\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient la transformée en z inverse de chaque élément, comme suit :

$$f_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = (1 - 2^k + k\ 2^k)u(k)$$

b) Méthode des résidus

$F_2(z)$ possède deux pôles: $z_1 = 1$, pôle simple, $n_1 = 1$.
$z_2 = 2$, pôle double, $n_2 = 2$.

$$f_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(2)$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z^2}{(z-1)\ (z-2)^2} z^{k-1} = 1$$

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 \frac{z^2}{(z-1)\ (z-2)^2} z^{k-1}\right] = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^{k+1}}{(z-1)}\right]$$

$$= \lim_{z \to 2}\left[\frac{(k+1)z^k (z-1) - z^{k+1}}{(z-1)^2}\right]$$

$$= (k+1)2^k - 2^{k+1} = k2^k - 2^k$$

D'où la TZ inverse de $F_2(z)$:

$$f_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = (1 - 2^k + k\ 2^k)u(k)$$

3) $F_3(z) = \dfrac{2}{z^2 + z - 2}$

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

$F_3(z)$ possède deux pôles simples : $z_1 = -2, z_2 = 1$. $F_3(z)$ peut être écrite comme suit :

$$F_3(z) = \frac{2}{(z+2)(z-1)}$$

$$\frac{F_3(z)}{z} = \frac{2}{z(z+2)(z-1)}$$

En décomposant $\dfrac{F_3(z)}{z}$ en éléments simples, on obtient :

$$\frac{F_3(z)}{z} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z+2} + \frac{c}{z-1} = \frac{(a+b+c)z^2 + (a-b+2c)z - 2a}{z(z+2)(z-1)}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-b+2c = 0 \\ -2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1/3 \\ c = 2/3 \end{cases}$. D'où :

$$\frac{F_3(z)}{z} = -\frac{1}{z} + \frac{1/3}{(z+2)} + \frac{2/3}{z-1}$$

Il en résulte :

$$F_3(z) = -1 + \frac{(1/3)z}{(z+2)} + \frac{(2/3)z}{z-1}$$

$$f_3(k) = Z^{-1}\{F3(z)\} = Z^{-1}\{-1\} + \frac{1}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+2)}\right\} + \frac{2}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)}\right\}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient la transformée en z inverse de chaque élément, comme suit :

$$f_3(k) = Z^{-1}\{F_3(z)\} = (-\delta(k) + \frac{(-2)^k}{3} + \frac{2}{3})u(k) \ (*)$$

où : $\delta(k)$ est l'impulsion de Dirac.

b) Méthode des résidus

$F_3(z)$ possède deux pôles simples: $z_1 = -2$, $z_2 = 1$.

$$f_3(k) = Z^{-1}\{F_3(z)\} = \mathrm{Res}(-2) + \mathrm{Res}(1)$$

$$\mathrm{Res}(-2) = \lim_{z \to -2} (z+2)\,\frac{2}{(z+2)\;(z-1)} z^{k-1} = \frac{-2}{3}(-2)^{k-1} = \frac{(-2)^k}{3}$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z \to 1} (z-1)\,\frac{2}{(z+2)\;(z-1)} z^{k-1} = \frac{2}{3}(1)^{k-1} = \frac{2}{3}$$

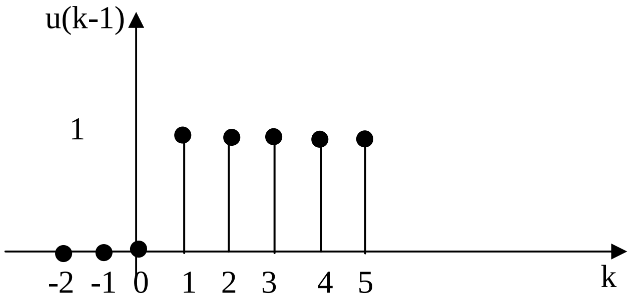
D'où la TZ inverse de $F_3(z)$:

$$f_3(k) = Z^{-1}\{F_3(z)\} = (\frac{2}{3} + \frac{(-2)^k}{3})u(k-1) \ (**)$$

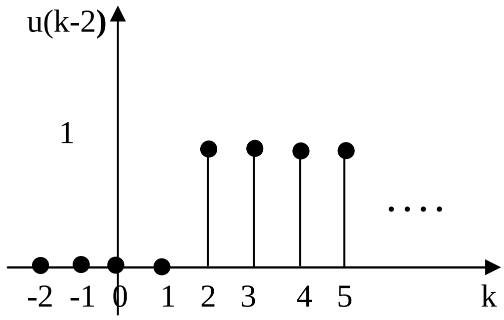
ou : $f_3(k) = \frac{2}{3} + \frac{(-2)^k}{3}, \ k \geq 1$

Remarque : La relation (**) est multipliée par u(k-1) (échelon unitaire retardé d'une période) pour obtenir un signal causal retardé d'une période, c'est-à-dire $f_3(k) = 0, k < 1$. Ce retard est dû au fait que la fonction $F_3(z)$ ne comporte pas le facteur z au numérateur. En effet, on peut faire apparaître ce retard, en multipliant le numérateur de $F_3(z)$ par $z z^{-1}$, où z^{-1} indique un retard d'une période d'échantillonnage.

L'expression (*) obtenue par la méthode de décomposition est équivalente à l'expression (**) obtenue par la méthode des résidus. En effet, si on calcule les valeurs de $f_3(k)$ pour les différentes valeurs de k, on trouve les mêmes valeurs.



Echelon unitaire discret retardé d'une période



Echelon unitaire discret retardé de 2 périodes

Avec :

$$u(k-1)=\begin{cases}1, \text{si } k\geq 1\\ 0, \text{ ailleurs}\end{cases} \qquad u(k-2)=\begin{cases}1, \text{si } k\geq 2\\ 0, \text{ ailleurs}\end{cases}$$

De manière générale, un échelon unitaire discret retardé de n périodes est défini comme suit :

$$u(k-n)=\begin{cases}1, \text{si } k\geq n\\ 0, \text{ ailleurs}\end{cases}$$

Ex.#4 Pour résoudre les équations aux différences suivantes, on applique la TZ pour obtenir l'expression de X(z), puis par application de la TZ inverse on obtient l'expression de x(k).

1)

$$x(k+1)-2x(k)=2k\,u(k)$$
$$x(0)=1$$

Rappel : $Z\{f(k+a)\}=z^a\left(Z\{f(k)\}-\sum_{i=0}^{a-1} f(i)z^{-i}\right)$

Soit $X(z)=Z\{x(k)\}$. En appliquant la TZ, on obtient:

$$Z\{x(k+1)\}-2Z\{x(k)\}=2Z\{k\,u(k)\}$$

$$z\left(Z\{x(k)\}-x(0)\right)-2X(z)=2\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-2}+\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient :

$$x(k)=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right\}$$

On a $Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}=2^k u(k)$

et avec la méthode des résidus ou de décomposition (voir exo 3) on a :

$$Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right\}=(-2-2k+2\ \ 2^k)u(k)$$

D'où

$$x(k)=Z^{-1}\{X(z)\}=(-2-2k+3\ \ 2^k)u(k)$$

2)

$$x(k+1)-x(k)=2u(k)$$

$$x(0)=3$$

Soit $Z\{x(k)\}=X(z)$. En appliquant la TZ, on obtient :

$$Z\{x(k+1)\}-Z\{x(k)\}=Z\{2\,u(k)\}$$

$$\Rightarrow z\left(Z\{x(k)\}-x(0)\right)-X(z)=\frac{2z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{3z}{z-1}+\frac{2z}{(z-1)^2}$$

En appliquant la TZ inverse, on obtient

$$x(k)=Z^{-1}\{X(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{3z}{z-1}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)^2}\right\}$$

On a : $Z^{-1}\left\{\frac{3z}{z-1}\right\}=3u(k)$ et $Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)^2}\right\}=2ku(k)$

D'où :

$$x(k)=Z^{-1}\{X(z)\}=(3+2k)u(k)$$

Ex.#5 Résoudre l'équation aux différences d'ordre 2 suivante

$$x(k+2)-3x(k+1)+2x(k)=\delta(k)$$

$$x(0)=0$$

$$x(1)=0$$

$\delta(k)$: est l'impulsion de Dirac
Notons X(z) la TZ de x(k). En appliquant la TZ aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$Z\{x(k+2)\} - 3Z\{x(k+1)\} + 2Z\{x(k)\} = Z\{\delta(k)\}$$

Avec :

$$Z\{x(k+1)\} = z\left(Z\{x(k)\} - x(0)\right) = z\left(X(z) - x(0)\right)$$

$$Z\{x(k+2)\} = z^2\left(Z\{x(k)\} - x(0) - x(1)z^{-1}\right) = z^2\left(X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right)$$

D'où :

$$z^2\left(X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right) - 3z\left(X(z) - x(0)\right) + 2X(z) = 1$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

X(z) possède 2 pôles simples : $z_1 = 1, z_2 = 2$.

$$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(2)$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{(z-1)\ (z-2)} z^{k-1} = -(1)^{k-1} = -1$$

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{1}{(z-1)\ (z-2)} z^{k-1} = 2^{k-1}$$

D'où :

$$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = (-1 + 2^{k-1})u(k-1)$$

Ex.#6 un système discret est régi par l'équation de récurrence suivante

$$y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = x(k)$$

Rappel : $Z\{f(k-a)\} = z^{-a}\ Z\{f(k)\} = z^{-a}\ F(z)$

1. Déterminer la fonction de transfert du système Y(z)/X(z).

Notons X(z) la TZ de x(k) et Y(z) la TZ de y(k). En appliquant la TZ aux 2 membres de l'équation, on obtient :

$$Y(z) - 3z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = X(z)$$

D'où la fonction de transfert suivante :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 3z\ \ + 2}$$

2. Calculer les échantillons y(0), y(1), y(2)
A partir de l'équation de récurrence, on a :

$$y(k) = 3y(k-1) - 2y(k-2) + x(k)$$

$k = 0 \Rightarrow y(0) = 3y(-1) - 2y(-2) + x(0) = 1$

$k = 1 \Rightarrow y(1) = 3y(0) - 2y(-1) + x(1) = 4$

$k = 2 \Rightarrow y(2) = 3y(1) - 2y(0) + x(2) = 11$

3. Déterminer l'expression de la réponse indicielle du système en fonction de k. Tracer cette réponse.

A partir de la fonction de transfert, on a :

$Y(z) = G(z)X(z)$, avec $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \; \frac{z}{z-1}$$

D'où :

$$Y(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2 (z-2)}$$

Y(z) possède deux pôles :

$z_1 = 1$: pôle double et $z_2 = 2$: pôle simple.

$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(2)$$

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{z^3}{(z-1)^2 (z-2)} z^{k-1} \right] = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^3}{(z-2)} z^{k-1} \right] = -3 - k$$

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{z^3}{(z-1)^2 (z-2)} z^{k-1} = 2^3 \, 2^{k-1} = 4 \; 2^k$$

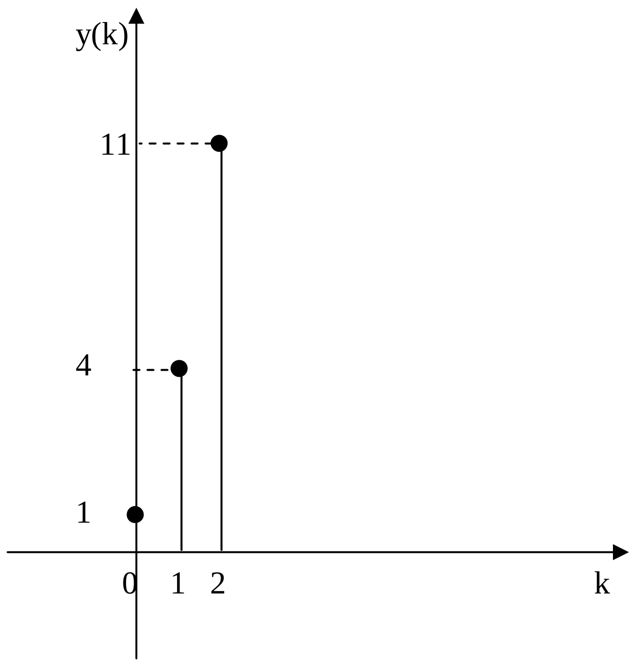
$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = (-3 - k + 4 \; 2^k) u(k)$$

Le tracé de la réponse : on a

$y(0) = 1$

$y(1) = 4$

$y(2) = 11$



Ex.#7 un système discret est régi par l'équation de récurrence suivante

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=x(k)$$

Avec les conditions initiales y(0)=0, y(1)=0.

x(k) représente l'entrée du système et y(k) sa sortie. x(k) est une impulsion de Dirac

1. Déterminer la fonction de transfert du système Y(z)/X(z).
Notons X(z) la TZ de x(k) et Y(z) la TZ de y(k). En appliquant la TZ aux 2 membres de l'équation, en considérant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$z^2Y(z)-5zY(z)+6Y(z)=X(z)$$

D'où la fonction de transfert suivante :

$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^2-5z+6}$$

2. Calculer les échantillons y(2), y(3) avec x(k) est une impulsion de Dirac.
A partir de l'équation de récurrence, on a :

$$y(k+2)=5y(k+1)-6y(k)+x(k)$$

D'où :

$$k=0 \Rightarrow y(2)=5y(1)-6y(0)+x(0)=1$$
$$k=1 \Rightarrow y(3)=5y(2)-6y(1)+x(1)=5$$

3. Déterminer l'expression de la réponse impulsionnelle du système en fonction de k. Tracer cette réponse.
A partir de la fonction de transfert, on a :

$Y(z)=G(z)X(z)$, avec $X(z)=1$

$$\Rightarrow Y(z)=G(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$$

D'où :

$$Y(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Y(z) possède deux pôles simples : $z_1=2$ et $z_2=3$.

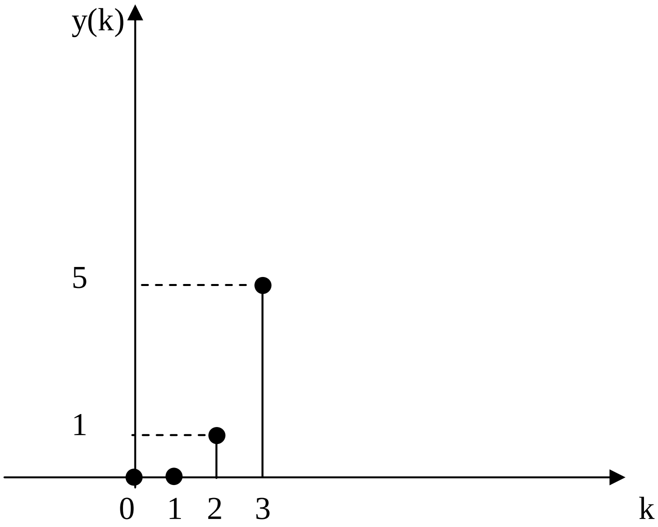
$$y(k)=Z^{-1}\{Y(z)\}=\mathrm{Res}(2)+\mathrm{Res}(3)$$

$$\mathrm{Res}(2)+\mathrm{Res}(3)=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-3)}z^{k-1}+\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-2)}z^{k-1}=(-2^{k-1}+3^{k-1})u(k-1)$$

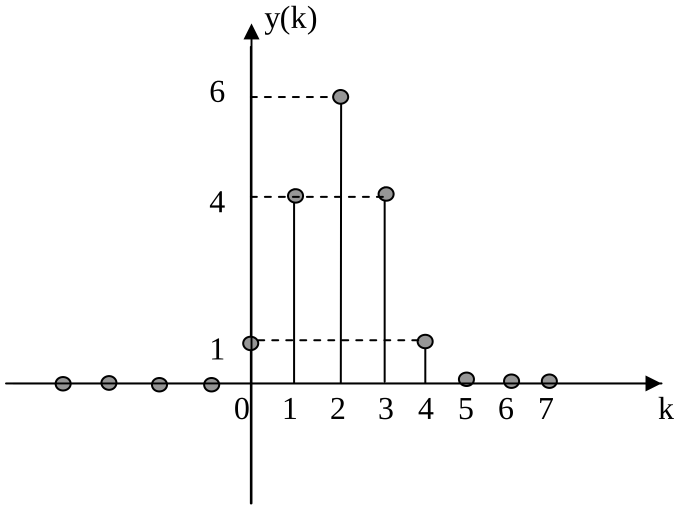
$$y(k)=Z^{-1}\{Y(z)\}=(-2^{k-1}+3^{k-1})u(k-1)$$

on a : $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y(2)=1$ et $y(3)=5$.

Le tracé de la réponse est montré sur la figure suivante



Ex.#8 Calcul de la transformée en z de la fonction discrète y(k) représentée par la figure ci-dessous (la fonction est aussi nulle dans les parties non représentées).



La transformée en z de y(k) est définie comme suit :

$$Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = y(0)z^{-0} + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + y(3)z^{-3} + y(4)z^{-4}$$
$$= 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$$

$$Y(z) = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}$$

Ex.#9 La réponse impulsionnelle y(k) d'un système est donnée dans le tableau suivant:

k	0	1	2	3	4	5	6	……	∞
y(k)	0	0.9	0.1	0	0	0	0	…….	0

- Calcul de la fonction de transfert G(z) du système :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{Z\{\delta(k)\}} = Y(z)$$

$\delta(k)$ est l'impulsion de Dirac, avec $Z\{\delta(k)\} = 1$.

$$Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = y(0)z^{-0} + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2}$$

$$= 0.9z^{-1} + 0.1z^{-2}$$

D'où :

$$G(z) = 0.9z^{-1} + 0.1z^{-2} = \frac{0.9z + 0.1}{z^2}$$