# Chapitre 5. Synthèse des régulateurs numériques

**5.1 Introduction**: L'objectif de la commande est de modifier et d'améliorer les performances du système à commander (précision, stabilité, rapidité, rejet de perturbation,..). Dans ce chapitre, nous verrons les méthodes principales de synthèse des régulateurs numériques.

## 5. 2 Méthodes de synthèse des régulateurs numériques

On distingue deux méthodes de synthèse des régulateurs numériques:

- **Synthèse d'un régulateur numérique par transposition d'un régulateur analogique**
- **Synthèse directe d'un régulateur numérique**

### 5.2.1 Synthèse d'un régulateur numérique par transposition (discrétisation) d'un régulateur analogique

Cette méthode consiste à concevoir d'abord un correcteur analogique satisfaisant dans le domaine analogique les spécifications d'un cahier de charge et d'effectuer ensuite une discrétisation (échantillonnage) du correcteur analogique obtenu comme le montre la figure 5.1.

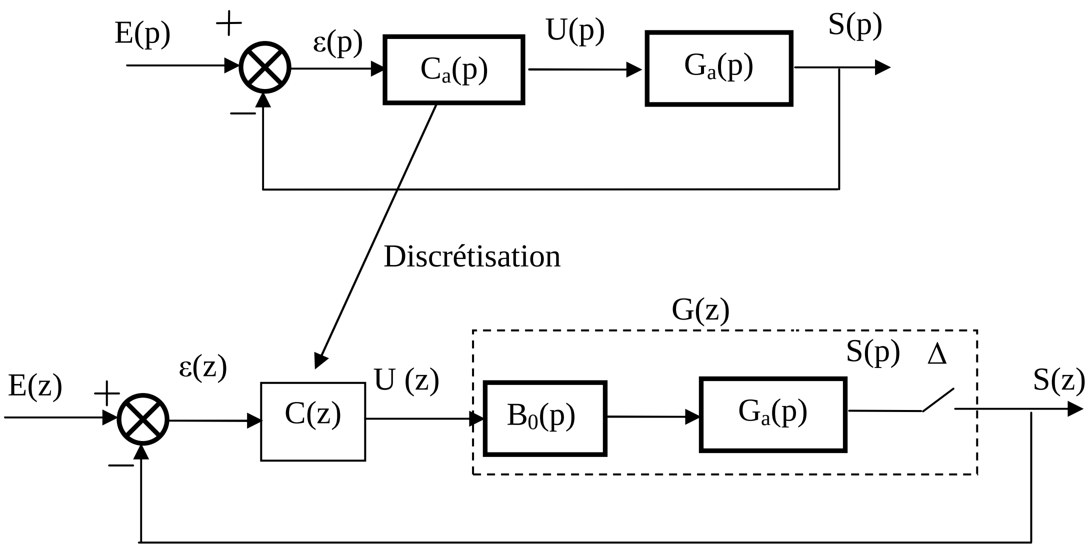



**Figure 5.1** Discrétisation d'un régulateur analogique

Plusieurs méthodes de discrétisation peuvent être utilisées pour calculer C(z) à partir de $C_a(p)$. Parmi ces méthodes on distingue:

### a) Méthodes basées sur l'approximation de la variable de Laplace p

Ces méthodes consistent à approximer la variable de Laplace p, c'est- à- dire, on cherche à obtenir la fonction de transfert C(z) d'un correcteur numérique en remplaçant la variable de Laplace p dans $C_a(p)$ par l'une des approximations suivantes:

**a.1) Discrétisation avant :** $p = \frac{z-1}{\Delta}$

**a.2) Discrétisation arrière :** $p = \frac{z-1}{z\Delta}$

**a.3) Approximation de Tustin (approximation bilinéaire) :** $p = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$

### b) Méthodes utilisant le Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ)

Dans ce cas le correcteur numérique est calculé comme suit :

$C(z) = Z(B_0(p)C_a(p)) = \frac{z-1}{z} Z(\frac{C_a(p)}{p})$ , avec Z indique la transformée en z.

Ce qui correspond au schéma de la figure 5.2 suivante:

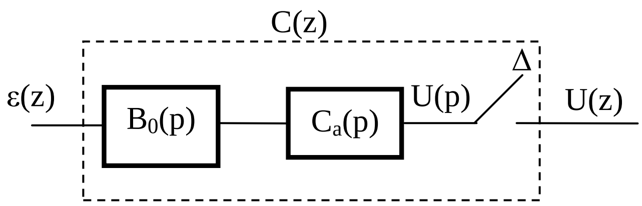



**Figure 5.2** Méthode de discrétisation utilisant un Bloqueur d'Ordre Zéro

**Exemple :** On considère le procédé représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G_a(p) = \frac{5}{p(p+1)}$$

Un correcteur de type avance de phase a été conçu pour que le système en boucle fermée ait une marge de phase $\phi = 45°$, son expression est donnée comme suit :

$$C_a(p) = \frac{1+0.53p}{1+0.21p}$$

**Calcul des correcteurs numériques**

Les correcteurs numériques obtenus par les différentes méthodes de discrétisation, pour une période d'échantillonnage Δ=0.3s sont donnés comme suit:

**Discrétisation avant :** $p = \frac{z-1}{\Delta}$ , $C(z) = \frac{0.53z-0.23}{0.21z+0.09}$

**Discrétisation arrière :** $p = \frac{z-1}{z\Delta}$**,** $C(z) = \frac{0.83z-0.53}{0.51z-0.21}$

**Discrétisation du Tustin :** $p = \frac{2}{\Delta}\frac{z-1}{z+1}$ **,** $C(z) = \frac{1.89z-1.06}{z-0.17}$

**Méthode de BOZ :** $C(z) = \frac{z-1}{z} Z(\frac{C_a(p)}{p}) = \frac{0.52z-1.76}{z-0.24}$

### 5.2.1.1 Régulateur PID numérique

Un régulateur PID (Proportionnel Intégral Dérivé) numérique résulte de la discrétisation d'un régulateur PID analogique en utilisant les méthodes de discrétisation citées ci-dessus.

La fonction de transfert d'un régulateur PID analogique est donnée par:

$$C_a(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p}\right) \tag{5.1}$$

Avec
K: gain proportionnel
Ti : action intégrale
Td : action dérivée
Td /N filtrage de l'action dérivée

Pour la discrétisation, nous approximons p (la dérivée) par $p = \frac{z-1}{z\Delta}$ et 1/p (intégration) par $\frac{\Delta z}{z-1}$ (approximation arrière citée dans la section précédente), il en résulte:

$$\frac{1}{Ti p} = \frac{\Delta}{Ti}\frac{z}{z-1}$$

$$T_d P = \frac{T_d}{\Delta}\frac{z-1}{z}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{T_d}{N} P} = \frac{1}{1 + \frac{T_d}{N\Delta}\frac{z-1}{z}} = \frac{\frac{N\Delta}{T_d + N\Delta}}{1 - \frac{T_d}{T_d + N\Delta}\frac{1}{z}}$$

En introduisant ces expressions dans (5.1), nous obtenons la fonction de transfert discrète d'un régulateur PID numérique

$$C(z) = K\left(1 + \frac{\Delta}{Ti}\frac{z}{z-1} + \frac{\frac{NT_d}{T_d + N\Delta}\frac{z-1}{z}}{1 - \frac{T_d}{T_d + N\Delta}\frac{1}{z}}\right) \tag{5.2}$$

$$C(z) = K\left(1 + \frac{\Delta}{Ti}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{NT_d}{T_d + N\Delta}(1-z^{-1})}{1 - \frac{T_d}{T_d + N\Delta}z^{-1}}\right) \tag{5.3}$$

- **Calcul de la loi de commande à programmer sur l'ordinateur**

Cela consiste à trouver l'expression de la loi de commande u(k), c'est-à-dire l'équation de récurrence qui lie u(k) à l'entrée $\varepsilon(k)$ du régulateur.

En réduisant au même dénominateur la relation (5.3), nous obtenons :

$$C(z)=\frac{U(z\ \ )}{\varepsilon(z)}=K\left(\frac{(1-z^{-1})(1-bz^{-1})+a(1-bz^{-1})+N\,b(1-z^{-1})^{2}}{(1-z^{-1})(1-bz^{-1})}\right)$$

où :

$$a=\frac{\Delta}{Ti}\ ,\ \ b=\frac{T_d}{T_d+N\Delta}$$

D'où :

$$U(z)-(1+b)z^{-1}U(z)+bz^{-2}U(z)=K(1+a+Nb)\varepsilon(z)-K(1+b+ab+2Nb)z^{-1}\varepsilon(z)+K(b+Nb)z^{-2}\varepsilon(z)$$

En appliquant la TZ inverse, nous obtenons alors la loi de commande :

$$u(k)=(1+b)u(k-1)-bu(k-2)+K(1+a+Nb)\varepsilon(k)-K(1+b+ab+2Nb)\varepsilon(k-1)+K(b+Nb)\varepsilon(k-2)$$

**Remarque**
De la relation (5.3), on peut déduire les expressions du régulateur Proportionnel P, Proportionnel Intégral (PI) et Proportionnel Dérivé (PD), comme suit :

P: $C(z)=K$

PI: $C(z)=K\left(1+\frac{\Delta}{Ti}\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$

PD : $$C(z)=K\left(1+\frac{\frac{NT_d}{T_d+N\Delta}(1-z^{-1})}{1-\frac{T_d}{T_d+N\Delta}z^{-1}}\right)$$

### 5.2.2 Synthèse directe d'un régulateur numérique

Cette méthode consiste à calculer un correcteur directement en numérique sans passer par une synthèse analogique. Dans ce cas, la structure du régulateur peut être choisie a priori ou déterminée pour atteindre un modèle imposé.

Le modèle imposé pour la boucle doit être choisi judicieusement, il est souvent du deuxième ordre, mais parfois défini différemment.

#### 5.2.2.1 Synthèse d'un régulateur numérique par imposition d'un modèle en BF

Soit $G(z)$ la fonction de transfert discrète de l'ensemble BOZ+procédé+CAN et $H_d(z)$ le modèle à atteindre en boucle fermée (modèle désiré en boucle fermée), le correcteur C(z) est déterminé comme suit :

$$C(z)=\frac{1}{G}\frac{H_d}{1-H_d}$$

Pour que le correcteur C(z) soit réalisable, il faut que le degré du numérateur soit inférieur ou égal à celui du dénominateur.
En général, $H_d(z)$ est choisi pour avoir en BF un système du deuxième ordre **(méthode de ZDAN**) ou pour avoir une réponse pile, etc.

#### 5.2.2.2 Synthèse d'un régulateur numérique par imposition d'un modèle en BO

Dans ce cas, la fonction de transfert en BO donnée par C(z)G(z) doit être choisie pour assurer les performances désirées. Par exemple, pour une bonne précision, la fonction de transfert en BO doit posséder une intégration (pôle en z=1).

Une autre méthode de synthèse d'une commande directement en numérique, est celle concernant la synthèse des régulateurs RST qu'on va étudier dans la section suivante.

### 5.3 Régulateurs numériques RST

Les régulateurs numériques RST dont le nom reflète les trois polynômes en z qu'ils font intervenir, sont des régulateurs dont la loi de commande peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)}E(z) - \frac{S(z)}{R(z)}Y(z)$$

Ou : $R(z)U(z) = T(z)E(z) - S(z)Y(z)$

Où : E(z) : est la consigne, Y(z): est la sortie du système à commander.

Cette structure est représentée sur la figure 5.3 (structure RST).

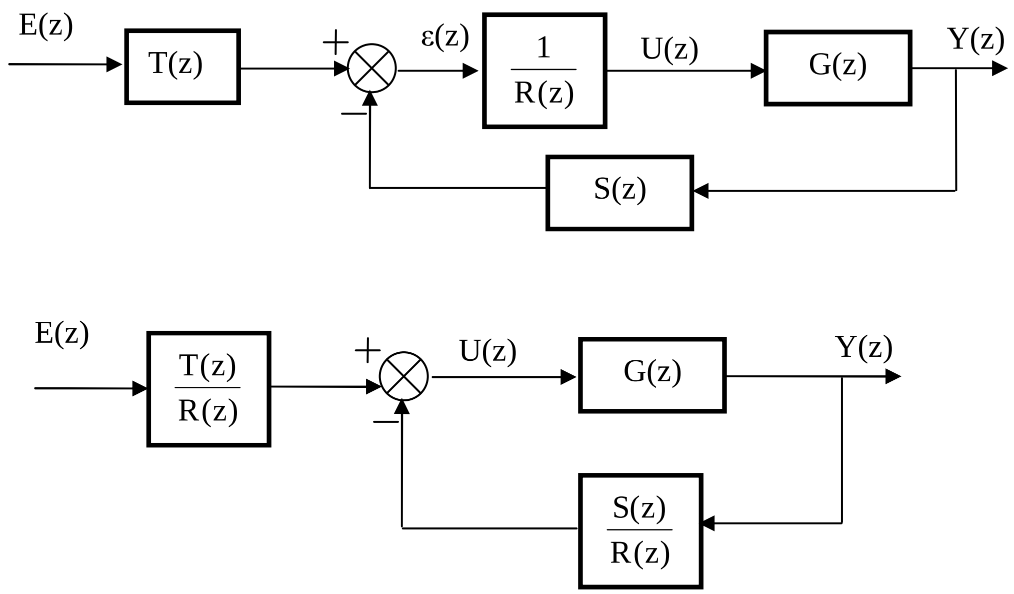



**Figure 5.3** Structure d'une commande RST

Avec $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ est la fonction de transfert discrète de l'ensemble BOZ+procédé+ échantillonneur.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$$

Les polynômes du régulateur S(z), R(z) et T(z) sont respectivement choisis de degrés : p, σ et q :

$S(z)=s_0 z^p+ s_1 z^{p-1}+\ldots\ldots+ s_p$
$R(z)=z^{\sigma}+ r_1 z^{\sigma-1}+\ldots\ldots+ r_{\sigma}$ (polynôme monique)
$T(z)=t_0 z^q+ t_1 z^{q-1}+\ldots\ldots+ t_q$

Le respect des conditions de causalité impose que : $\sigma \geq p$ et $\sigma \geq q$.

Souvent on est amené à prendre les polynômes R(z), S(z) et T(z) du même degré p=σ=q.

Les régulateurs RST sont bien adaptés à la régulation des processus sans conditions sur les polynômes dénominateur et numérateur et notamment des processus avec zéros instables.

**Remarque** : Si on pose T(z)=S(z), on revient à la commande classique, i.e.,:

$$R(z)U(z)=S(z)E(z)-S(z)Y(z)\Rightarrow U(z)=\frac{S(z)}{R(z)}\varepsilon(z)=C(z)\varepsilon(z).$$

La commande classique est donc un cas particulier de la commande RST. La commande RST est cependant beaucoup plus riche. En effet, on dispose de plus de degrés de liberté dans sa synthèse.

### 5.3.1Méthodes de synthèse du régulateur RST

La détermination des paramètres du régulateur (les coefficients des polynômes R, S et T) se fait par imposition d'un modèle en BF. De manière générale, le modèle imposé est celui d'un système de $2^{ieme}$ ordre spécifié par une pulsation propre et un coefficient d'amortissement. Il est parfois nécessaire de spécifier d'autres performances, telles qu'une erreur statique nulle, le rejet d'une perturbation,…..Nous exposons ici l'une des méthodes de calcul des polynômes R, S et T dans le cas d'un système avec zéros stables et instables.

- **Commande d'un système à zéros instables et stables :** les zéros instables sont les zéros de module >1. Les zéros d'un système caractérisent la rapidité. La présence d'un zéro rend un système à non minimum de phase qui est un système non rapide par rapport à un système à minimum de phase.

Considérons un système dont le numérateur possède à la fois des zéros stables et instables. Sa fonction de transfert est :

$$G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Posons : $B(z)=B_i(z)B_s(z)$ (5.4)

Avec $B_i(z)$ et $B_s(z)$ sont les parties à zéros stables et instables, respectivement, i.e. :

$$B_s(z)=(z-z_1)(z-z_2)........$$
$$B_i(z)=K(z-z'_1)(z-z'_2).....$$

Avec : $z_1, z_2,$........sont les zéros stables et $z'_1, z'_2,$......... sont les zéros instables. Les zéros stables sont compensables.

On a la fonction du transfert en boucle fermée de l'asservissement 5.3 est donnée par:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Soit $H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$, le modèle désiré (modèle à atteindre en boucle fermée) avec un gain statique égal à 1. On calcule R(z), S(z) et T(z) pour avoir $H(z) = H_m(z)$.

Le modèle désiré $H_m(z)$ doit satisfaire la relation suivante :

$$\deg\text{ré }(A_m(z)) - \deg\text{ré }(B_m(z)) \geq \deg\text{ré }(A(z)) - \deg\text{ré }(B(z))$$

Soit : $B_m(z) = B_i(z)B'_m(z)$ (5.5)

Le polynôme R(z) intervient au dénominateur de H(z). Il est utilisé pour compenser les zéros compensables du processus, contenus dans $B_s(z)$ et aussi pour assurer la précision et ce par les intégrateurs qu'il contient. La structure de R(z) est choisie comme suit:

$$R(z) = (z-1)^i B_s(z)R'(z) \tag{5.6}$$

i: indique le nombre d'intégrateurs.

$R'(z)$ est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Le polynôme T(z) fournit les zéros nécessaires pour obtenir le numérateur $B_m(z)$ du modèle désiré, dont une partie est déjà fournie par la partie non compensable du processus. T(z) est choisi comme suit :

$$T(z) = B'_m(z)A_0(z) \tag{5.7}$$

Le degré de $A_0(z)$ doit respecter la relation suivante :

$$\deg\text{ré }(A_0(z)) \geq 2\deg\text{ré }(A(z)) - \deg\text{ré }(A_m(z)) - \deg\text{ré}(B_s(z)) + i - 1$$

L'objectif est d'avoir $H(z) = H_m(z)$, i.e, :

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \tag{5.8}$$

En remplaçant (5.4), (5.5), (5.6) et (5.7) dans (5.8), on obtient :

$$\frac{B_i(z)B_s(z)B'_m(z)A_0(z)}{A(z)(z-1)^i B_s(z)R'(z)+B_i(z)B_s(z)S(z)}=\frac{B_i(z)B'_m(z)}{A_m(z)}$$

Apres simplification, on obtient :

$$A(z)(z-1)^i R'(z)+B_i(z)S(z)=A_m(z)A_0(z) \tag{5.9}$$

Cette équation est appelée **identité de Bézout** ou **équation de Diophantine**.

Ainsi, la résolution de l'équation ci-dessus permet de déterminer les polynômes $R'(z)$ et S(z), puis on déduit les polynômes R et T à partir de (5.6) et (5.7).

Les polynômes S(z) et R'(z) ont les formes suivantes:

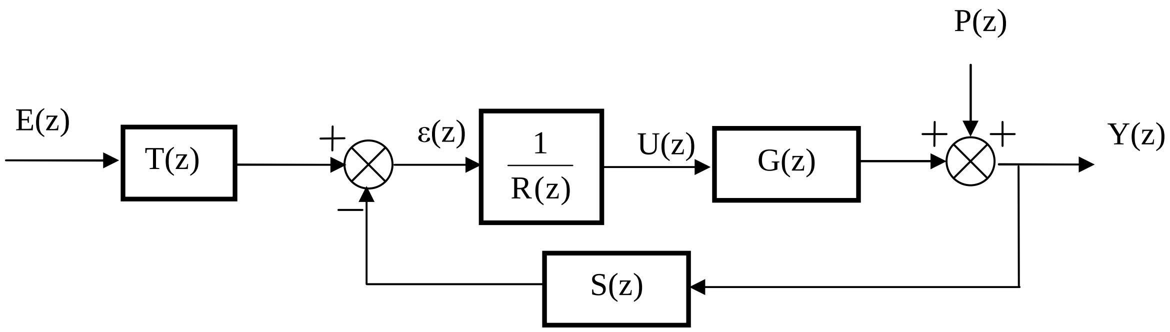
$$S(z)=s_0 z^p+s_1 z^{p-1}+\ldots\ldots+s_p$$
$$R'(z)=z^\sigma+r_1 z^{\sigma-1}+\ldots\ldots+r_\sigma$$

Tels que les degrés doivent respecter les relations suivantes:

$$\deg ré\ (S(z))<\deg ré\ (A(z))+i$$
$$\deg ré\ (R'(z))=\deg ré(A_0(z))+\deg ré\ (A_m(z))-\deg ré\ (A(z))-i$$

**5.3.2 Rejet de perturbation par le régulateur RST**

Considérons la boucle de régulation numérique suivante :




P(z): est la perturbation.

L'expression de Y(z) est donnée comme suit :

$$Y(z)=\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}E(z)+\frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}P(z)$$

Dans l'expression ci dessus, il y'a deux fonctions de transfert. L'une décrit la dynamique en asservissement (P(z)=0) et l'autre décrit la dynamique en régulation (E(z)=0).
La dynamique en régulation (E(z)=0) est :

$$\frac{Y(z)}{P(z)}=\frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$$

Le choix judicieux des polynômes R(z) et S(z) permet d'éliminer l'effet de la perturbation p(t).

Pour éliminer l'effet d'une perturbation constante, il faut que le gain statique de la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{P(z)}$ soit égal à zéro. Cela implique que le produit A(z) R(z) possède un zéro pour z=1. Cela signifie que le correcteur doit posséder un intégrateur.

**Remarque**
Tous les régulateurs numériques ont la structure RST. Cette dernière est dite la forme canonique des régulateurs numériques.

### 5.3.3 Structure RST d'un régulateur PID numérique

Nous avons vu précédemment que la fonction de transfert d'un régulateur PID numérique est :

$$C(z)=\frac{U(z)}{\varepsilon(z)}=K\left(1+\frac{\Delta}{Ti}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{NT_d}{T_d+N\Delta}(1-z^{-1})}{1-\frac{T_d}{T_d+N\Delta}z^{-1}}\right)$$

En faisant la somme des trois termes on obtient:

$$C(z)=\frac{U(z)}{\varepsilon(z)}=\frac{s_0+s_1z^{-1}+s_2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+r_1z^{-1})}=\frac{S(z)}{R(z)}$$

D'où :

$$U(z)=\frac{S(z)}{R(z)}E(z)-\frac{S(z)}{R(z)}Y(z)$$

Avec :

$$r_1=-\frac{T_d}{T_d+N\Delta}$$

$$s_0=K(1+\frac{\Delta}{Ti}-N\,r_1)$$

$$s_1=K\left(r_1(1+\frac{\Delta}{Ti}-2N)-1\right)$$

$$s_2=-K\ r_1(1+N)$$

Dans la structure RST de régulateur PID numérique, le polynôme $S(z)=T(z)$, donc le schéma de la figure **5.3** devient :

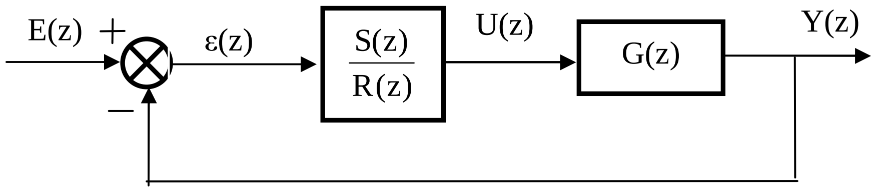



**Figure 5.4** : Boucle de régulation numérique utilisant le régulateur PID numérique de type RST

La fonction du transfert en boucle fermée devient :

$$H(z) = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

La détermination des paramètres $r_1, s_0, s_1$ et $s_2$ se fait généralement par placement de pôles comme suit:
Soit $P_d(z)$ le polynôme caractéristique désiré en BF. Ainsi, la résolution de l'**identité de Bézout** ci-dessous permet de déterminer les paramètres.

$$P_d(z)=A(z)R(z)+B(z)S(z)$$

**5.4 Régulation de systèmes de différents types**

Dans la partie précédente, nous avons exposé les méthodes principales de synthèse de régulateurs numériques. Dans cette partie, nous verrons la méthode à adopter pour chaque type de système.

**5.4.1 Définition des différents types des systemes** : Soit G(z) la fonction de transfert du systeme, soit n le degré du dénominateur et m le degré du numérateur.

**a) Système de type P1** : le système décrit par G(z) est dit de type P1 si :
- m=n ou m=n-1
- Tous les zéros sont stables donc compensables

**b) Système de type P2**
- m≤n-2
- Tous les zéros sont stables

**c) Système de type P3**
- La différence de degrés entre le numérateur et le dénominateur est quelconque
- Il possède des zéros stables et instables

**5.4.2 Régulation d'un système de type P1**

Pour ce type de système, la méthode de synthèse des régulateurs généralement adoptée consiste à imposer un modèle en BO.

**5.4.3 Régulation d'un système de type P2**

Dans ce cas, la méthode de synthèse généralement adoptée est celle consistant à imposer un modèle en BF. Le modèle à atteindre en BF est du second d'ordre avec retards nécessaires à la faisabilité de C(z).

**5.4.4 Régulation d'un systeme de type P3**

Pour réguler ce type de système, on utilise un régulateur RST.

**Références**

1- A. Jutard, M. Betemps, Systèmes asservis linéaires échantillonnés, institut national des sciences appliquées, Lyon, 1998.

2- D. Peaucelle, Systèmes à temps discret, Commande numérique des procédés, 2003.

3- Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier, Commande par calculateur. Identification, Eyrolles, 1998.

4- R. Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques, P. P. U. R., 1995.

5- I. D. Landau, Identification et commande des systèmes, Hermès, 1993.

6- Y. Granjon, Automatique-Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Cours et exercices corrigés, 2ieme édition, Dunod, Paris, 2001, 2010.

7- C. L. Phillips, H. T. Nagle, Digital control system- analysis and design, Prentice Hall, 1990.