Chapitre 2. Echantillonnage des signaux

2.1 Echantillonnage : L'utilisation de calculateurs numériques dans la commande des systèmes, nécessite un échantillonnage des signaux. Cette opération est réalisée par le CAN comme il a été décrit dans le premier chapitre. Le CAN assure aussi l'opération de la quantification dont les effets seront négligés dans ce module. Ainsi, le rôle d'un CAN peut être limité à celui d'un échantillonneur. L'opération d'échantillonnage consiste à transformer un signal à temps continu en un signal à temps discret défini par des valeurs distinctes prises à des instants kΔ, Δ est la période d'échantillonnage.

Comme il a été vu dans le premier chapitre, le signal y(t) échantillonné noté y*(t) est défini par :

$$y^*(t) = y(t)p(t)$$

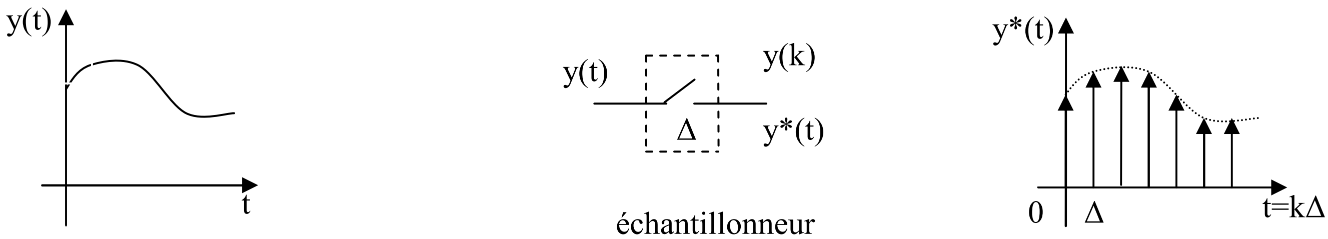
p(t) est le peigne de Dirac, défini par:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - k\Delta)$$

D'où : $y^*(t) = y(t)p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(t)\delta(t - k\Delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k\Delta)\delta(t - k\Delta)$

Apres échantillonnage d'un signal y(t) on obtient la série y(k), avec y(k)=y(kΔ), i.e . :

$$y^*(t) = \{y(0), y(\Delta), y(2\Delta), ...\} = \{y(0), y(1), y(2), ...\} = y(k)$$



Signal analogique

Signal échantillonné (discret ou numérique)

Fig 2.1 : Echantillonnage d'un signal analogique

Remarque : Pour simplifier les choses, nous ne prenons pas en considération les traitements de quantification et de codage. Avec cette hypothèse, nous avons donc le signal numérique est égal au signal échantillonné.

Le symbole d'un échantillonneur est celui d'un interrupteur.

2.2 Reconstruction d'un signal échantillonné

L'opération d'échantillonnage peut entrainer une perte d'information si la période d'échantillonnage est mal choisie. Afin d'éviter la perte de l'information et afin de pouvoir reconstruire un signal analogique y(t) à partir de ses échantillons y(k) sans erreur, le théorème de Shannon doit être respecté.

Le spectre d'un signal échantillonné y*(t) obtenu par la transformée de Fourrier est montré sur la figure suivante:

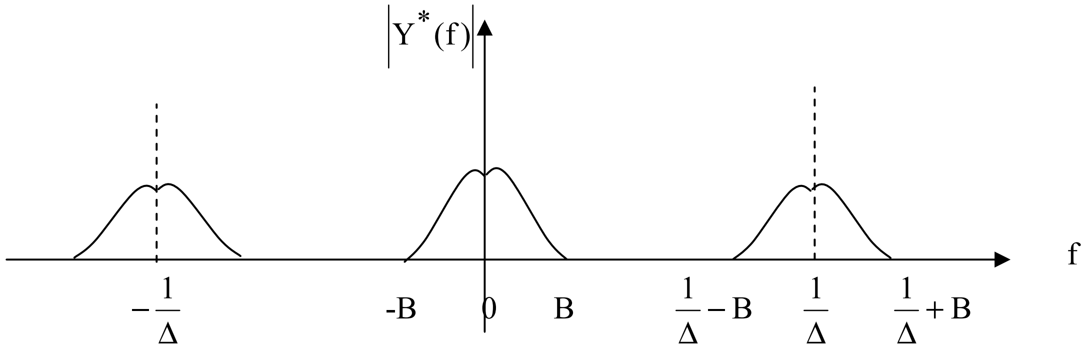


Fig. 2.2 Spectre d'un signal échantillonné

où : $\frac{1}{\Delta}$ est la fréquence d'échantillonnage.

B : est la largeur spectrale du signal qui correspond à la plus haute fréquence contenue dans le signal continu y(t).

A partir de la figure 2.2, on constate que le premier segment décalé, dans le spectre de y*(t), se trouve centré sur la fréquence $\frac{1}{\Delta}$ et s'étend de $\frac{1}{\Delta}-B$ à $\frac{1}{\Delta}+B$. Donc on voit bien qu'il n'ya pas de recouvrement de segments (chevauchement des segments du spectre ou repliement). La condition de non recouvrement est d'avoir $\frac{1}{\Delta}>2B$. La condition de non recouvrement de segments est nécessaire pour pourvoir reconstruire le signal analogique y(t). Ceci conduit au théorème de Shannon.

- **Théorème de Shannon**

Lorsqu'on échantillonne un signal analogique, la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{\Delta}$ doit être choisie supérieure au double de la plus haute fréquence contenue dans le signal initial (analogique).

Remarque : La reconstruction du signal est réalisée par un bloqueur d'ordre zéro dont le rôle est de maintenir l'amplitude de l'impulsion, entre les instants $k\Delta$ et $(k+1)\Delta$, constante. La fonction de transfert d'un BOZ a été donnée dans le chapitre précédent.

2. 3 La transformée en z d'un signal discret (ou échantillonné)

La transformée en z (TZ) est l'outil fondamental dans l'analyse des signaux discrets (ou échantillonnés). C'est la représentation équivalente à la transformée de Laplace des signaux continus.

La transformée en z d'une fonction discrète y(k), telle que y(k)=0, k<0 (fonction causale) est définie par : $Y(z)= Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k}$

où Z indique la transformée en Z. z est une variable complexe, avec $z = e^{\Delta p}$.

où p est la variable de Laplace.

La fonction y(k) s'appelle l'originale de Y(z), ou encore sa transformée inverse.

Remarque : La transformée en z ci-dessus est dite unilatérale. C'est la transformée pour les signaux causaux (i.e., y(k)=0, k<0).

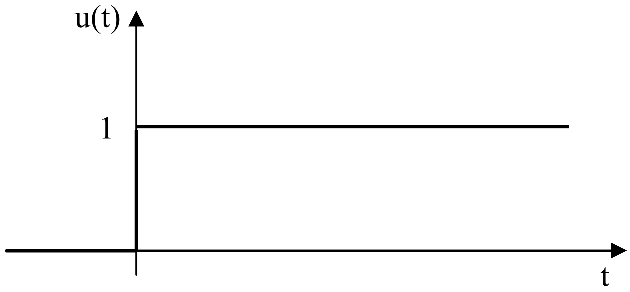
La transformée en z bilatérale (fonctions non causales), est définie par :

$$Y(z)= Z\{y(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)\, z^{-k}$$

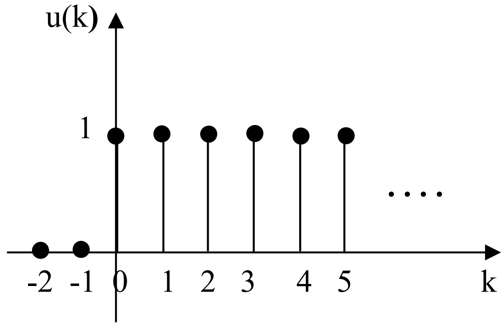
Remarque: y(k) représente le signal échantillonné dans le domaine temporel discret et Y(z) est la représentation dans le domaine fréquentiel.

2.3.1 Calcul de la transformée en z de quelques signaux

a) Echelon unitaire



Echelon continu



Echelon échantillonné (discret)

Un échelon unitaire continu est défini comme suit:

$$u(t) = \begin{cases} 1, \text{si } t \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Un échelon unitaire discret ou échantillonné est défini comme suit en posant $t = k\Delta$:

$$u(k\Delta) = \begin{cases} 1, \text{si } k\Delta \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad u(k) = \begin{cases} 1, \text{si } k \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Soit $U(z)$, la transformée en z de u(k), donnée comme suit

$$U(z) = Z\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots.. + z^{-k} + \ldots...$$

En utilisant la propriété suivante d'une série géométrique infinie

pour $|x| < 1$, on a : $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots... = \dfrac{1}{1-x}$

L'expression de U(z) sera simplifiée comme suit :

$$U(z) = Z\{u(k)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

La TZ d'un échelon unitaire est :

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

b) Echelon non unitaire d'amplitude A

Un échelon continu d'amplitude A est défini comme suit:

$$e(t) = Au(t) = \begin{cases} A, \text{si } t \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

où u(t) est un échelon unitaire.

En posant $t = k\Delta$, on obtient l'échelon discret:

$$e(k\Delta) = Au(k\Delta) = \begin{cases} A, \text{si } k\Delta \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases} \quad \text{ou} \quad e(k) = Au(k) = \begin{cases} A, \text{si } k \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

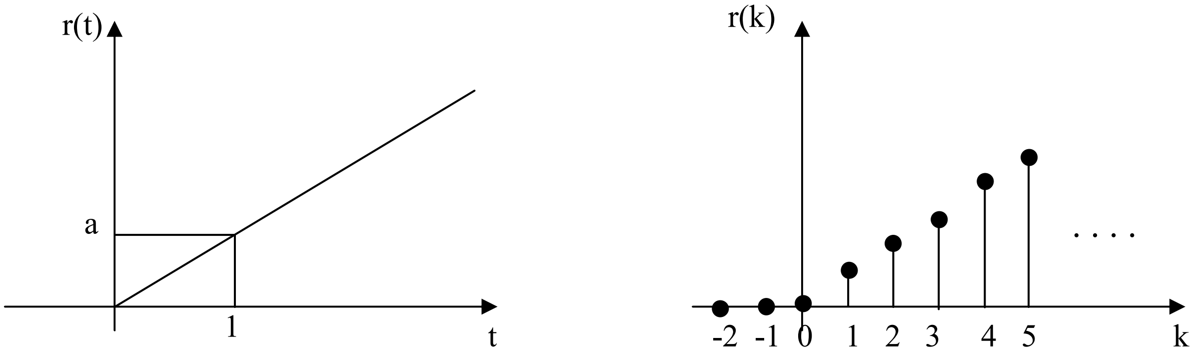
Il en résulte :

$$E(z) = Z\{e(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} Au(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} Az^{-k} = A\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-k} + ...\right)$$

En utilisant la propriété d'une série géométrique infinie, on obtient :

$$E(z) = \frac{Az}{z-1}$$

c) Rampe de pente a



Lorsque a = 1, la rampe est dite unitaire.

La rampe continue causale est définie comme suit

$$r(t) = at\,u(t) = \begin{cases} at, \text{si } t \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

où u(t) est un échelon unitaire.

Remarque : La multiplication par u(t) permet d'obtenir une rampe causale.

Pour obtenir l'expression mathématique de la rampe discrète (ou échantillonnée), on pose $t = k\Delta$, d'où :

$$r(k\Delta) = ak\Delta\, u(k\Delta) = \begin{cases} ak\Delta, \text{si } k\Delta \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Cette expression est équivalente à :

$$r(k) = ak\Delta\, u(k) = \begin{cases} ak\Delta, \text{si } k \geq 0 \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Soit R(z), la TZ de la rampe, donc:

$$R(z) = Z\{r(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} r(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} ak\Delta u(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} ak\Delta z^{-k} = a\Delta\left(z^{-1} + 2z^{-2} + ... + kz^{-k} + ...\right)$$

Pour simplifier l'expression de R(z), on utilise la dérivée de la TZ d'un échelon unitaire, donnée comme suit :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{d}{dz}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-k} + ...\right)$$

D'où :

$$\frac{-1}{(z-1)^2} = -z^{-1}\left(z^{-1} + 2z^{-2} + ... + kz^{-k} + ...\right)$$

Il en résulte :

$$\frac{z}{(z-1)^2} = z^{-1} + 2z^{-2} + ... + kz^{-k} + ...$$

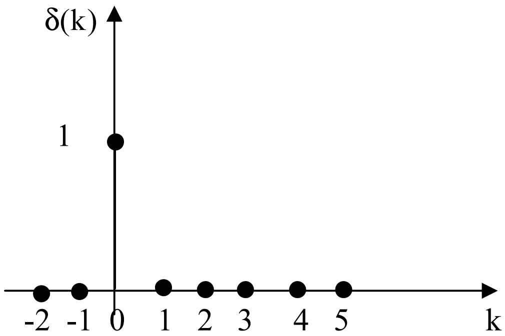
D'où :

$$\frac{a\Delta z}{(z-1)^2} = a\Delta\left(z^{-1} + 2z^{-2} + ... + kz^{-k} + ...\right)$$

La TZ d'une rampe est :

$$R(z) = \frac{a\Delta\, z}{(z-1)^2},\ |z| > 1$$

d) Impulsion de Dirac



L'impulsion échantillonnée ou discrète est définie comme suit :

$$\delta(k\Delta) = \begin{cases} 1, \text{si } k\Delta = 0 \\ 0, \text{si } k\Delta \neq 0 \end{cases} \quad \text{ou : } \delta(k) = \begin{cases} 1, \text{si } k = 0 \\ 0, \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

En appliquant la transformée en z, on obtient :

$$Z\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1 z^{0} + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 z^{-k} = 1$$

e) La fonction $f(t) = e^{-at} u(t)$

La fonction discrète est donnée par :

$$f(k\Delta) = e^{-ak\Delta} u(k\Delta) \;\text{ ou }\; f(k) = e^{-ak\Delta} u(k)$$

$$F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ak\Delta} u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ak\Delta} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^{k}$$

Avec $B = e^{-a\Delta} z^{-1}$.

En utilisant la propriété d'une série géométrique infinie, on obtient :

$$F(z) = Z\{f(k)\} = \frac{1}{1-B} = \frac{1}{1-e^{-a\Delta} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-a\Delta}}$$

2.3.2 Méthodes de calcul de la transformée en z

a) **Par la définition de la TZ** : Cette méthode permet de calculer la TZ d'un signal discret y(k), en utilisant la définition suivante :

$$Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k}$$

b) **Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table**

Soit $F(p)$ une fonction dans le domaine de Laplace qui a la forme générale suivante

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}, \quad n \geq m$$

Le principe de la méthode de décomposition en éléments simples consiste à écrire la fonction $F(p)$ sous forme d'éléments simples pouvant être identifiés dans la table donnant les transformées en z des fonctions usuelles (donnée à la fin de ce chapitre). Cette méthode est constituée des étapes suivantes:

Etape 1. Calcul des pôles de $F(p)$: les valeurs qui annulent le dénominateur de F(p). C'est-à-dire on cherche les racines de $D(p) = 0$.

Etape 2. Factorisation du dénominateur de $F(p)$.

1. **Pôles simples :** Soient $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ les pôles de $F(p)$, simples.

F(p) peut être écrite comme suit:

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots\ldots\ldots(p - p_n)}$$

2. **Pôles multiples**

Si $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$ sont multiples et de multiplicité $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$, avec $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$, alors $F(p)$ peut être écrite comme suit:

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)^{n_1} (p - p_2)^{n_2} \ldots\ldots\ldots (p - p_k)^{n_k}}$$

Etape 3. Décomposition de $F(p)$ en éléments simples

1. Pôles simples

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

A_i sont des constantes qu'on détermine par identification ou par la relation suivante

$$A_i = \lim_{p \to p_i} (p - p_i) \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)..........(p - p_n)}$$

2. Pôles multiples

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p - p_1)^{n1}} + \frac{A_{12}}{(p - p_1)^{n1-1}} + ... + \frac{A_{1n_1}}{(p - p_1)}$$
$$+ \frac{A_{21}}{(p - p_2)^{n2}} + \frac{A_{22}}{(p - p_2)^{n2-1}} + ... + \frac{A_{2n2}}{(p - p_2)}$$
$$+ \frac{A_{k1}}{(p - p_k)^{nk}} + \frac{A_{k2}}{(p - p_k)^{nk-1}} + ... + \frac{A_{k\,nk}}{(p - p_k)}$$

Les A_{ij} sont déterminés par identification.

Etape 4. Calcul de F(z) en utilisant la table

Exemple : Calculer la TZ de la fonction suivante

$$F(p) = \frac{p + 2}{p(p + 1)^2}$$

On constate que le dénominateur de F(p) est sous la forme factorisée.

- **Calcul des pôles** : $p(p+1)^2 = 0$, on a deux pôles:

$p_1 = 0$, pôle simple, $n_1 = 1$.

$p_2 = -1$, pôle double, $n_2 = 2$.

F(p) peut être décomposée comme suit :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{C}{p + 1} = \frac{(A + C)p^2 + (2A + B + C)p + A}{p(p + 1)^2}$$

Par identification: $A = 2, B = -1, C = -2$, d'où :

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{-1}{(p + 1)^2} + \frac{-2}{p + 1}$$

En utilisant la table des transformées en z, on obtient:

$$F(z) = Z\{F(p)\} = \frac{2z}{z - 1} - \frac{\Delta z e^{-\Delta}}{(z - e^{-\Delta})^2} - \frac{2z}{z - e^{-\Delta}}$$

c) Méthode des résidus

Soit $F(p)$ une fonction dans le domaine de Laplace qui a la forme générale suivante :

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+...+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_0},\quad n\geq m$$

La TZ de la fonction F(p), est définie comme suit :

$$F(z)=\sum \mathrm{Residus}\,F(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}}$$

La méthode des résidus est composée des étapes suivantes:

Etape 1. Calcul des pôles et factorisation du dénominateur de F(p).

1. **Pôles simples** : Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ les pôles de $F(p)$, simples.

F(p) peut être écrite comme suit:

$$F(p)=\frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)..........(p-p_n)}$$

2. Pôles multiples

Si $p_1, p_2, ..., p_k$ sont multiples et de multiplicité $n_1, n_2, ..., n_k$, tel que $n_1+n_2+.......+n_k=n$, alors $F(p)$ peut être écrite comme suit:

$$F(p)=\frac{N(p)}{(p-p_1)^{n_1}(p-p_2)^{n_2}..........(p-p_k)^{n_k}}$$

Etape2. Calcul des résidus

Soit p_k un pôle de F(p).

Si p_k est un pôle simple, alors:

$$\mathrm{Res}(p_k)=\lim_{p\to p_k}(p-p_k)F(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}}$$

Si p_k est un pôle multiple, de multiplicité n_k, alors:

$$\mathrm{Res}(p_k)=\lim_{p\to p_k}\frac{1}{(n_k-1)!}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left[(p-p_k)^{n_k}F(p)\frac{z}{z-e^{\Delta p}}\right]$$

où : Res(pk): est le résidu relatif au pôle p_k.

Etape 3. Calcul de F(z)
Pour chaque pôle p_k de F(p), calculer le résidu $\mathrm{Res}(p_k)$ et F(z) est la somme des résidus, i.e. :

$$F(z) = \sum \mathrm{Res}(p_k)$$

Exemple : Déterminer la fonction F(z) correspondante à: $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 3p + 2}$

- **Calcul des pôles**: $D(p) = 0 \rightarrow p^2 + 3p + 2 = 0$; on a deux pôles simples réels : $p_1 = -1, p_2 = -2.$

$F(p)$ peut être écrite comme suit :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

- **Calcul des résidus**

$$\mathrm{Res}(p_1) = \mathrm{Res}(-1) = \lim_{p \to -1} (p+1)\frac{1}{(p+1)(p+2)}\frac{z}{z - e^{\Delta p}} = \frac{z}{z - e^{-\Delta}}$$

$$\mathrm{Res}(p_2) = \mathrm{Res}(-2) = \lim_{p \to -2} (p+2)\frac{1}{(p+1)(p+2)}\frac{z}{z - e^{\Delta p}} = -\frac{z}{z - e^{-2\Delta}}$$

$$F(z) = \mathrm{Res}(-1) + \mathrm{Res}(-2) = \frac{z}{z - e^{-\Delta}} - \frac{z}{z - e^{-2\Delta}}$$

2.3.3 Propriétés fondamentales de la transformée en z

Les propriétés qui suivent permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation en z) les transformées en z de certains signaux.

a) Linéarité

$$Z\{a\,f(k) + b\,g(k)\} = aZ\{f(k)\} + bZ\{g(k)\} = aF(z) + bG(z)$$

où a et b sont des constantes arbitraires réelles

b) Théorème du retard

Dans le domaine continu, $f(t-\tau)$ désigne une fonction retardée de la durée τ. Dans le domaine discret, la fonction discrète $f(k-a)$ désigne une fonction retardée de a périodes.

$$Z\{f(k-a)\} = z^{-a} Z\{f(k)\} = z^{-a} F(z)$$

Remarque : Dans le domaine discret, z^{-1} représente un retard d'une période d'échantillonnage et z^{-a} représente un retard de a périodes.

c) Théorème d'avance: Dans le domaine discret, f(k+a) désigne une fonction avancée de a périodes, alors :

$$Z\{f(k+a)\} = z^a\left(Z\{f(k)\} - \sum_{i=0}^{a-1} f(i)z^{-i}\right)$$

d) Théorème de la valeur initiale

Dans le domaine continu, la valeur initiale d'un signal continu se déduit de sa transformée de Laplace comme suit :

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$$

La version discrète de ce théorème est donnée par :

$$f(0) = \lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to+\infty} F(z)$$

Cette formule permet de déterminer la valeur initiale de f en fonction de sa transformée en z.

e) Théorème de la valeur finale

Dans le domaine analogique (continu), la valeur finale se calcule comme suit:

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

Dans le domaine discret:

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

Cette formule permet de déterminer la valeur finale de f en fonction de sa transformée en z.

f) Translation complexe

$$Z\{e^{-ak\Delta} f(k)\} = F(ze^{a\Delta}) \text{, avec : } F(z) = Z\{f(k)\}$$

g) Produit de convolution

$$Z\{f(k) * g(k)\} = Z\{f(k)\}\, Z\{g(k)\} = F(z)G(z)$$

2.4 La transformée en z inverse

L'inverse de la transformée en z consiste à déterminer la fonction originale f(k) à partir de sa transformée en z, F(z). Elle permet de passer du domaine fréquentiel z au domaine temporel k. On note :

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Les méthodes utilisées pour le calcul de la TZ inverse sont:

a) Méthode de décomposition en éléments simples et utilisation de la table

La méthode de décomposition est aussi utilisée pour calculer la TZ inverse.

Soit $F(z)$ une fonction en z qui a la forme générale suivante

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1}+...+b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0}, \; n \geq m$$

Pour calculer la TZ inverse de F(z), on suit les étapes suivantes:

Etape 1. Calcul des pôles de $F(z)$: les valeurs qui annulent le dénominateur de F(z).

Etape 2. Factorisation du dénominateur de $F(z)$.

1. Pôles simples : Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ les pôles de $F(z)$, alors F(z) peut être écrite comme suit:

$$F(z)=\frac{N(z)}{(z-z_1)(z-z_2)...........(z-z_n)}$$

2. Pôles multiples
Si $z_1, z_2, ..., z_k$ sont multiples et de multiplicité $n_1, n_2, ..., n_k$, alors $F(z)$ peut être écrite comme suit:

$$F(z)=\frac{N(z)}{(z-z_1)^{n1}(z-z_2)^{n2}...........(z-z_k)^{nk}}$$

Etape 3. Décomposition de $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples

Etape 4. Multiplication par z des éléments simples

Etape 5 : Calcul de la TZ inverse f(k) en utilisant la table.

- **Exemple 1**: Déterminer la TZ inverse de la fonction suivante:

$$F(z)=\frac{0.1z(z+1)}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

Le dénominateur de F(z) est sous la forme factorisée. On a

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{0.1(z+1)}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

En décomposant $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples, on obtient :

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{a}{(z-1)}+\frac{b}{(z-1)^2}+\frac{c}{(z-0.6)}=\frac{(a+c)z^2+(b-1.6a-2c)z+0.6a-0.6b+c}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

Par identification on a : $a=-1; b=0.5; c=1$. D'où :

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{-1}{(z-1)}+\frac{0.5}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-0.6)}$$

Il en résulte :

$$F(z)=\frac{-z}{(z-1)}+\frac{0.5z}{(z-1)^2}+\frac{z}{(z-0.6)}$$

En utilisant la table des transformée en z, on obtient les transformées en z inverse de chaque élément, comme suit :

$$f(k)=Z^{-1}\{F(z)\}=(-1+0.5k+0.6^k)u(k)$$

u(k) est échelon unitaire utilisé pour avoir un signal causal. u(k) peut être remplacé par $k \geq 0$, i.e :

$$f(k)=-1+0.5k+0.6^k,\ k\geq 0$$

- **Exemple 2**: Déterminer la TZ inverse de la fonction suivante:

$$F(z)=\frac{3}{z^2-z-2}$$

- Calcul des pôles : F(z) possède 2 pôles simples : $z_1=-1, z_2=2$.

F(z) peut être écrite comme suit :

$$F(z)=\frac{3}{(z+1)(z-2)}$$

On a

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{3}{z(z+1)(z-2)}$$

En décomposant $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples, on obtient :

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z+1}+\frac{c}{z-2}=\frac{(a+b+c)z^2+(-a-2b+c)z-2a}{z(z+1)(z-2)}$$

Par identification on a : $a = -1.5; b = 1; c = 0.5$. D'où :

$$\frac{F(z)}{z} = -\frac{1.5}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{0.5}{z-2}$$

En multipliant par z on obtient:

$$F(z) = -1.5 + \frac{z}{z+1} + \frac{0.5z}{z-2}$$

En utilisant la table des transformée en z, on obtient la transformée en z inverse de chaque élément, comme suit :

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\} = (-1.5\delta(k) + (-1)^k + 0.5 \;\; 2^k)u(k)$$

Ou : $f(k) = -1.5\,\delta(k) + (-1)^k + 0.5 \;\; 2^k, \;\; k \geq 0$

b) La méthode des résidus

La méthode des résidus permet de calculer la transformée en z. Elle est aussi utilisée pour le calcul de la TZ inverse. Dans ce cas, la TZ inverse f(k) d'une fonction F(z), est définie comme suit :

$$f(k) = \sum \; \mathrm{Residus}\, F(z)\, z^{k-1}$$

Les étapes de cette méthode sont données comme suit:

Soit $F(z)$ une fonction en z qui a la forme générale suivante:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0}, \; n \geq m$$

Etape 1. Calcul des pôles et factorisation du dénominateur de F(z).

1. Pôles simples : Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ les pôles de $F(z)$, alors F(z) peut être écrite comme suit:

$$F(z) = \frac{N(z)}{(z-z_1)(z-z_2)...........(z-z_n)}$$

2. Pôles multiples

Si $z_1, z_2, ..., z_k$ sont multiples et de multiplicité $n_1, n_2, ..., n_k$, alors $F(z)$ peut être écrite comme suit:

$$F(z) = \frac{N(z)}{(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}..........(z-z_k)^{n_k}}$$

Etape2. Calcul des résidus

Soit z_k un pôle de F(z).
Si z_k est un pôle simple, alors:

$$\mathrm{Res}(z_k) = \lim_{z \to z_k} (z-z_k) F(z) z^{k-1}$$

Si z_k est un pôle multiple, de multiplicité n_k, alors:

$$\mathrm{Res}(z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(n_k-1)!} \frac{d^{n_k-1}}{dz^{n_k-1}}\left[(z-z_k)^{n_k} F(z) z^{k-1}\right]$$

Res(zk): est le résidu relatif au pôle z_k.

Etape 3. Calcul de f(k)
Pour chaque pôle z_k de F(z), calculer le résidu $\mathrm{Res}(z_k)$, puis:

$$f(k) = \sum \mathrm{Res}(z_k)$$

- **Exemple :** Calculer la TZ inverse de la fonction suivante:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6}$$

- **Calcul des pôles et factorisation du dénominateur de F(z)**

F(z) possède deux pôles simples : $z_1 = 2, z_2 = 3$.

F(z) peut être écrite comme suit : $F(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)\ (z-3)}$

- **Calcul des résidus**

$$\mathrm{Res}(z_1) = \mathrm{Res}(2) = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{z^2}{(z-2)\ (z-3)} z^{k-1} = -4\ \ 2^{k-1} = -2^{k+1}$$

$$\mathrm{Res}(z_2) = \mathrm{Res}(3) = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{z^2}{(z-2)\ (z-3)} z^{k-1} = 9\ \ 3^{k-1} = 3^{k+1}$$

La TZ inverse de F(z) est :

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\} = \mathrm{Res}(2) + \mathrm{Res}(3) = (-2^{k+1} + 3^{k+1}) u(k)$$

c) Division polynomiale (division euclidienne)

Cette méthode donne le résultat sous forme d'échantillons: $y(0), y(1), y(2), \ldots\ldots$

Exemple : $Y(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - 1.4z^2 + 0.5z - 0.1}$

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^3 - 1.4z^2 + 0.5z - 0.1 \\
\cline{2-2}
-\left(z^2 - 1.4z + 0.5 - 0.1z^{-1}\right) & z^{-1} + 1.4z^{-2} + 1.46z^{-3} + 1.44z^{-4} + \ldots\ldots \\
\text{-------------------------------------} & \\
1.4z - 0.5 + 0.1z^{-1} & \\
-\left(1.4z - 1.96 + 0.7z^{-1} - 0.14z^{-2}\right) & \\
\text{-------------------------------------} & \\
1.46 - 0.6z^{-1} + 0.14z^{-2} & \\
-\left(1.46 - 2.04z^{-1} + 0.73z^{-2} - 0.146z^{-3}\right) & \\
\text{-------------------------------------} & \\
1.44z^{-1} - 0.59z^{-2} + 0.146z^{-3} & \\
\qquad\vdots &
\end{array}
$$

Donc Y(z) s'écrit comme suit:

$$Y(z) = z^{-1} + 1.4z^{-2} + 1.46z^{-3} + 1.44z^{-4} + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k}$$

Les valeurs des échantillons sont:

$y(0) = 0$

$y(1) = 1$

$y(2) = 1.4$

$y(3) = 1.46$

$y(4) = 1.44$

d) Méthode de l'équation de récurrence (ou équations aux différences)

Dans le domaine analogique, un système est décrit par une équation différentielle ou une fonction de transfert. Le passage de l'équation différentielle à la fonction de transfert ou vice-versa, se fait par application de la transformée de Laplace ou de la transformée inverse. Dans le domaine discret, un système est décrit par une équation de récurrence (équation aux différences) ou par une fonction de transfert en z. Le passage d'une représentation à l'autre (qui sera détaillé dans le chapitre suivant) se fait par application de la TZ ou de la TZ inverse.

La méthode de l'équation de récurrence permet de calculer les échantillons : $y(0),\ y(1),\ y(2),........$ et ce en connaissant l'entrée e(k) du système.

Exemple : Soit la fonction de transfert suivante

$$\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{0.3z}{z-0.2}=\frac{0.3}{1-0.2z^{-1}}$$

1) Calcul de l'équation de récurrence

A partir de la fonction de transfert, on obtient :

$$Y(z)(1-0.2z^{-1})=0.3E(z)\Rightarrow Y(z)-0.2z^{-1}Y(z)=0.3E(z)$$

En appliquant la TZ inverse aux deux membres de l'équation ci-dessous, comme suit

$$Z^{-1}\{Y(z)\}-0.2Z^{-1}\{z^{-1}Y(z)\}=0.3\,Z^{-1}\{E(z)\}$$

Avec : $Z^{-1}\{z^{-1}Y(z)\}=y(k-1)$ (voir les propriétés de la TZ: Théorème du retard)

On obtient l'équation de récurrence suivante:

$$y(k)-0.2y(k-1)=0.3e(k)$$

2) Calcul des échantillons $y(0), y(1), y(2)$ pour une entrée échelon unitaire, i.e, :

$$e(k)=1, \forall k\geq 0$$

A partir de l'équation de récurrence, on a :

$$y(k)=0.2y(k-1)+0.3e(k)$$

D'où :

$y(0)=0.2y(-1)+0.3e(0)=0.3$, ($y(-1)=0$: y(k) causal, i.e., y(k)=0, k<0)
$y(1)=0.2y(0)+0.3e(1)=0.36$
$y(2)=0.2y(1)+0.3e(2)=0.37$

2.5 Application de la TZ à la résolution des équations de récurrence

Soit à résoudre : $\begin{cases} x(k+1)-ax(k)=u(k) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$

soient $Z\{x(k)\}=X(z)$ et $Z\{u(k)\}=U(z)$. En appliquant la TZ à l'équation de récurrence ci-dessus, on obtient :

$$Z\{x(k+1)\}-aZ\{x(k)\}=Z\{u(k)\}$$

Avec :

$Z\{x(k+1)\} = z(Z\{x(k)\} - x(0))$ (voir les propriétés de la TZ : Théorème d'avance)

D'où :

$$z(X(z) - x(0)) - aX(z) = U(z)$$

Il en résulte :

$$X(z) = \frac{U(z)}{z-a} + \frac{z}{z-a}x(0)$$

u(k) est donné donc sa transformée en z est connue. En appliquant la TZ inverse on obtient :

$$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\}$$

Références

1- A. Jutard, M. Betemps, Systèmes asservis linéaires échantillonnés, institut national des sciences appliquées, Lyon, 1998.

2- Maurice Rivoire, Jean Louis Ferrier, Commande par calculateur. Identification, Eyrolles, 1998.

3- R. Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques, P. P. U. R., 1995.

4- D. Peaucelle, Systèmes à temps discret, Commande numérique des procédés, 2003.

5- I. D. Landau, Identification et commande des systèmes, Hermès, 1993.

6- Y. Granjon, Automatique-Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Cours et exercices corrigés, 2ieme édition, Dunod, Paris, 2001, 2010.

7- C. L. Phillips, H. T. Nagle, Digital control system- analysis and design, Prentice Hall, 1990.

La table des transformées en z usuelles

Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné f_k	Transformée en z $F(z) = \mathcal{Z}[f_k]$
1	$\delta(t)$	$f_0 = 1\,,\quad \forall k \neq 0 \quad f_k = 0$	1
e^{-ap}	$\delta(t-a)$		
e^{-hTp}	$\delta(t-hT)$	$f_h = 1\,,\quad \forall k \neq h \quad f_k = 0$	z^{-h}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	kT	$T\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{p^3}$	t^2	k^2T^2	$T^2\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
		$(-a)^k$	$\frac{z}{z+a}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

T: est la période d'échantillonnage