

## Chapitre 4

### Analyse des systèmes dans le domaine fréquentielle

#### Introduction

Dans un système asservi, on examine les performances en terme de précision et en terme de rapidité; on y présente les paramètres caractéristiques en régime temporel et fréquentiel, ainsi que les équations de passages des uns et des autres.

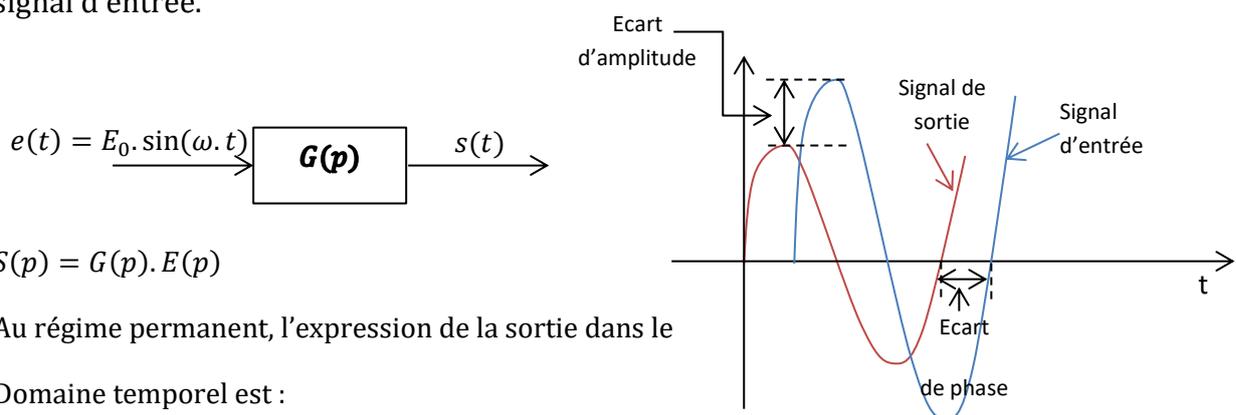
Dans l'analyse de ces systèmes, on y présente la stabilité et la précision (dynamique et statique).

Il consiste de souligner qu'expérimentalement, on peut déterminer la fonction de transfert d'un système donné, en lui faisant subir des essais harmoniques, en excitations par une entrée variant sinusoïdalement avec le temps, et de mesurer par la suite l'amplitude et la phase de la sortie avec des fréquences qui varient.

#### I- Réponse en fréquence d'un système

La réponse en fréquence d'un système est l'étude du régime permanent (vu que c'est le régime qui nous permet d'étudier la stabilité).

La sortie d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale est aussi de forme sinusoïdale de même pulsation, mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée.



$$S(p) = G(p) \cdot E(p)$$

Au régime permanent, l'expression de la sortie dans le  
Domaine temporel est :

$$s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Avec :

$$S_0 = E_0 \cdot \|G(j\omega)\|$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

$G(j\omega)$  : est la réponse en fréquence, qu'on obtient en remplaçant la variable de Laplace ( $p$ ) par ( $j\omega$ ).  $G(j\omega)$  étant un nombre complexe.

**Exemple** : soit un système de fonction de transfert  $G(p)$  suivante :

$$G(p) = \frac{p + 1}{p(p + 10)}$$

Calculer la réponse lorsque  $e(t) = 20 \cdot \sin(5 \cdot t)$ , avec  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  et  $E_0 = 20 \text{ v}$ .

- Calcul de la réponse en fréquence :

$$G(j\omega) = \frac{j \cdot \omega + 1}{(j \cdot \omega)(j \cdot \omega + 10)} \Rightarrow \|G(j \cdot \omega)\| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega \cdot \sqrt{\omega^2 + 100}}$$

$$\arg(G(j \cdot \omega)) = \arg(j \cdot \omega + 1) - \arg(j \cdot \omega) - \arg(j \cdot \omega + 10) = \varphi(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

D'où l'expression de la sortie  $s(t)$  est :

$$s(t) = 20 \cdot \|G(j \cdot \omega)\| \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega))$$

Calcul de  $\|G(j \cdot \omega)\|$  pour  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  :

$$\|G(j \cdot \omega)\| = \frac{\sqrt{5^2 + 1}}{5 \cdot \sqrt{5^2 + 100}} = 0.09$$

Calcul de l'amplitude du signal de sortie :

$$S_0 = 0.09 \times 20 = 1.82 \text{ v}$$

Calcul de l'argument pour  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  :

$$\varphi(\omega) = \arctan(5) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{5}{10}\right) = -37.87^\circ$$

La sortie aura l'expression suivante :

$$s(t) = 1.82 \sin(5 \cdot t - 37.87^\circ)$$

Donc, dans l'analyse fréquentielle, on étudie en fonction de la pulsation, les deux fonctions  $\|G(j \cdot \omega)\|$  et  $\varphi(\omega)$  à partir des tracés de ces deux fonctions, on peut déduire les caractéristiques du système. Pour la courbe du module, au lieu de représenter  $\|G(j \cdot \omega)\|$  en valeurs arithmétiques, on trace le module en décibel.

$$\|G(j\omega)\|_{dB} = 20 \log(\|G(j\omega)\|) = A_{dB}(\omega)$$

**Note** : On distingue principalement trois représentations graphiques :

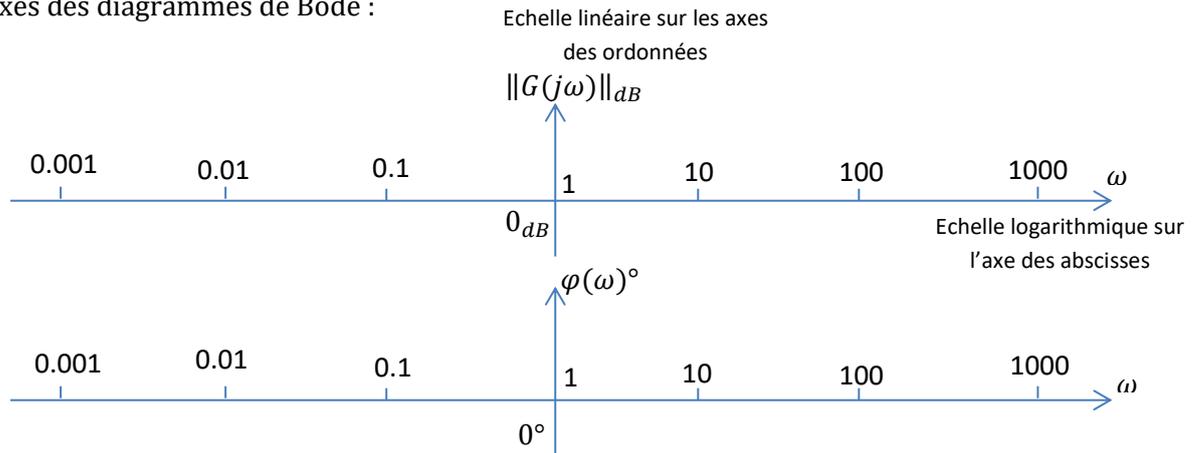
- 1- Tracé de Bode ;
- 2- Tracé de Nyquist ;
- 3- Tracé de Black-Nichols.

## II- Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode consistent à tracer deux graphes correspondant au gain en décibel et au déphasage respectivement, en fonction de la pulsation.

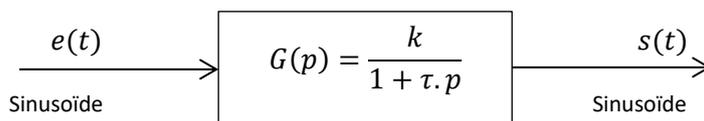
Soit  $G(p)$  une fonction de transfert d'un système en boucle ouverte. La réponse en fréquences est notée  $G(j\omega)$ , dont le module arithmétique est noté  $\|G(j\omega)\|$  et son module en décibel est noté  $\|G(j\omega)\|_{dB}$ ;  $\varphi(\omega)$  est l'argument de  $G(j\omega)$ .

Les axes des diagrammes de Bode :



### II-1- Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Soit  $G(p)$  la fonction de transfert d'un système du premier ordre représenté sur le schéma fonctionnel suivant :



$k$  : gain statique.

$\tau$  : constante de temps

La réponse en fréquence est :

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + \tau \cdot j \cdot \omega}$$

Le modulé arithmétique :

$$\|G(j\omega)\| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}}$$

Le module en décibel :  $\|G(j\omega)\|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}} = 20 \log(k) - 10 \log(1 + \tau^2 \cdot \omega^2)$

L'argument de  $G(j\omega)$  est :

$$\arg(G(j \cdot \omega)) = \arg(k) - \arg(1 + \tau \cdot j \cdot \omega) = \arct\left(\frac{0}{k}\right) - \arctg\left(\frac{\tau\omega}{1}\right)$$

Donc :  $\varphi(\omega) = -\arctg(\tau \cdot \omega)$ .

Pour le tracé des courbes,  $\left\{ \begin{array}{l} \|G(j\omega)\| \\ \varphi(\omega) \end{array} \right.$  et

on aura à calculer quelques limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \|G(j\omega)\| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}} = k$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \arct\left(\frac{0}{k}\right) - \arctg(\tau \cdot \omega) \right) = 0 \text{ pour } k > 0$$

Et :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \|G(j\omega)\| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \arct\left(\frac{0}{k}\right) - \arctg(\tau \cdot \omega) \right) = -\frac{\pi}{2} \text{ pour } k > 0$$

Calcul des limites en dB :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \|G(j\omega)\|_{dB} = k_{dB}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \|G(j\omega)\|_{dB} = -\infty$$

A  $\omega = \frac{1}{\tau} \text{ rad/s}$ , on a :

$$\|G(j\omega)\| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\|G(j\omega)\|_{dB} = 20 \log(k) - 3dB = k_{dB} - 3dB$$

On appelle  $\omega = \frac{1}{\tau} \text{ rad/s}$  la pulsation de coupure, car le gain chute de 3dB de son maximum.

Lorsque augmente ( $\omega \rightarrow +\infty$ ), l'amplitude de la sortie est nulle. Le système du 1<sup>er</sup> ordre laisse passer les basses fréquences (sans forte atténuation), et atténue fortement le signal en hautes fréquences. D'un point de vu fréquentiel, le système du 1<sup>er</sup> ordre est considéré comme un filtre passe bas, avec  $\omega_c = \frac{1}{\tau} \text{ rad/s}$  est la pulsation de coupure.

La bande passante est :  $BP = [0, \omega_c]$ .  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ , plus  $\tau$  est petit, plus la BP est grande et, plus  $\tau$  est grand, plus la BP est petite.

### III- Diagramme de Bode d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre

Soit un système de second ordre de fonction de transfert :  $F(p) = \frac{k}{\omega_n^2 + \frac{2.h}{\omega_n}p + 1}$

La réponse en fréquence est :

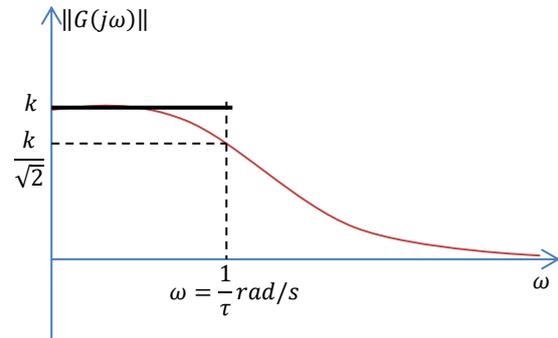
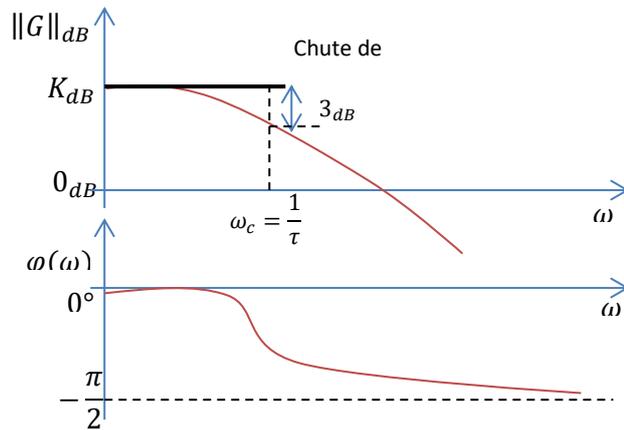


Figure 4 : Tracé du gain arithmétique en fonction de  $\omega$



$$F(j\omega) = \frac{k}{\frac{(j\cdot\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\cdot h}{\omega_n}(j\cdot\omega) + 1} = \frac{k}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\cdot h}{\omega_n}(j\cdot\omega)}$$

$$\|F(j\omega)\| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot\omega\cdot h}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\frac{2\cdot\omega\cdot h}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\arctg\left(\frac{2\cdot\omega\cdot\omega_n\cdot h}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

- Calcul de  $\omega_r$  pour  $\|F(j\cdot\omega)\|_{max}$  (calcul de l'extremum) :

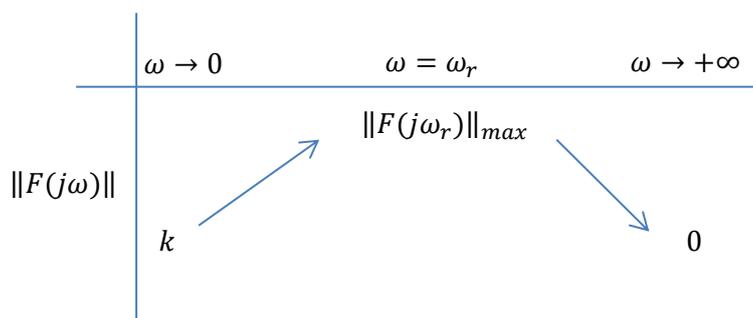
Posons  $g = \|F(j\omega)\| \Rightarrow g' = \frac{d\|F(j\omega)\|}{d\omega} = k \cdot \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot\omega\cdot h}{\omega_n}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$

Calcul de

$$g' = \frac{2\cdot k \cdot \frac{\omega}{\omega_n^2} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - (1 - 2\cdot h^2) \right]}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\cdot h^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$g'(\omega_r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \text{ ou} \\ \frac{\omega}{\omega_n^2} \left[ \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - (1 - 2\cdot h^2) \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\cdot h^2} \text{ avec } \omega_r < \omega_n. (\omega_r \text{ existe si } h < \frac{\sqrt{2}}{2})$$



$\|F(j\cdot\omega)\|_{max} = \|F(j\omega_r)\|$  (c'est la zone du phénomène de résonance).

On définit le facteur de résonance comme suit :

$$Q = \frac{\|F(j\cdot\omega_r)\|_{max}}{\|F(0)\|} = \frac{1}{2\cdot h\sqrt{1 - h^2}}$$

Avec :

$$\|F(0)\| = k$$

Et : 
$$\|F(j.\omega)\|_{max} = \frac{k}{2.h\sqrt{1-h^2}}$$

Ainsi 
$$\varphi(\omega_r) = \arctg\left(\left[\frac{\sqrt{1-2.h^2}}{h}\right]\right)$$

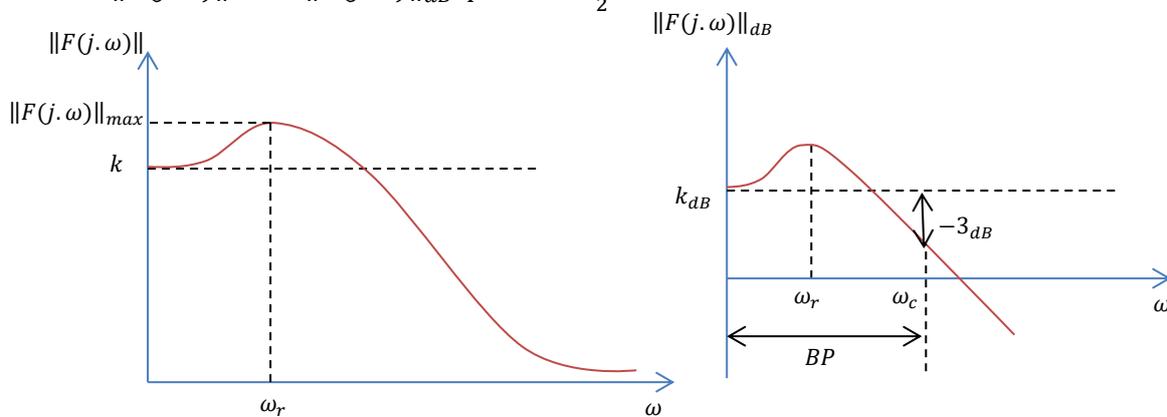
$Q$  peut être évalué en décibel, tel que :  $M_Q = 20 \log Q$

Pour résumer, la dérivée de  $\|F(j.\omega)\|$  s'annule à  $\omega_r = \omega_n.\sqrt{1-2.h^2}$

Ce qui signifie que  $\|F(j.\omega)\|$  présente un maximum et a lieu pour des valeurs  $h < 0.7$  et

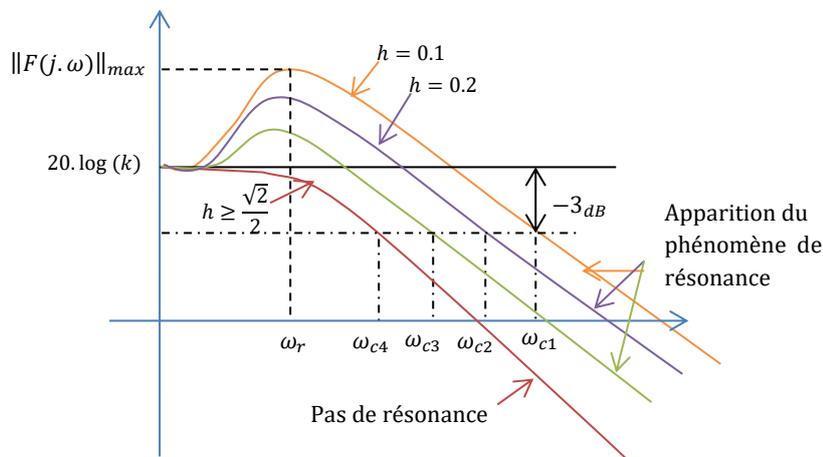
$$\begin{cases} \|F(j\omega_r)\| = \frac{k}{2.h\sqrt{1-h^2}} \\ \varphi(\omega_r) = \arctg\left(\left[\frac{\sqrt{1-2.h^2}}{h}\right]\right) \end{cases}$$

Tracé de  $\|F(j.\omega)\|$  et de  $\|F(j.\omega)\|_{dB}$  pour  $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ :



|       |          |     |      |      |                      |
|-------|----------|-----|------|------|----------------------|
| $h$   | 0        | 0.1 | 0.2  | 0.43 | 0.707                |
| $Q$   | 0        | 5   | 2.55 | 1.3  | 1                    |
| $M_Q$ | $\infty$ | 14  | 8.14 | 2.3  | 0 (pas de résonance) |

La courbe ci-dessous montre les différentes réponses pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $h$  :



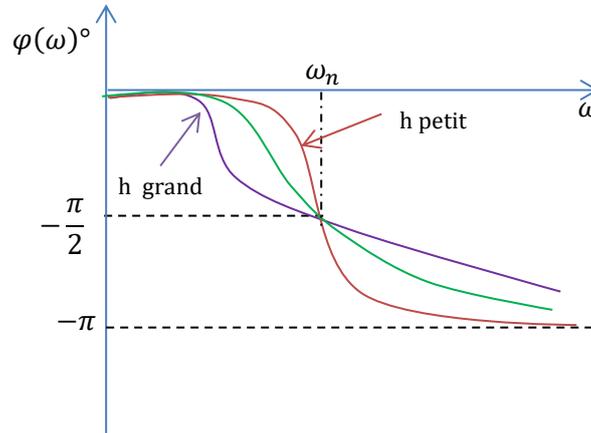
Le système du second ordre est aussi considéré comme un filtre passe bas avec :

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2 \cdot h^2 + \sqrt{1 + (1 - 2 \cdot h^2)^2}}$$

$\omega_c > \omega_n > \omega_r$ . La bande passante est  $BP = [0, f_c]$

Tel que :  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$

Courbe de phase :



#### IV- Diagramme asymptotique de Bode

Pour des systèmes d'ordre  $n > 2$ , le tracé exact des diagrammes de Bode (courbe de gain en dB et celle de la phase) est très difficile à obtenir. Ce qui nécessite un tracé asymptotique :

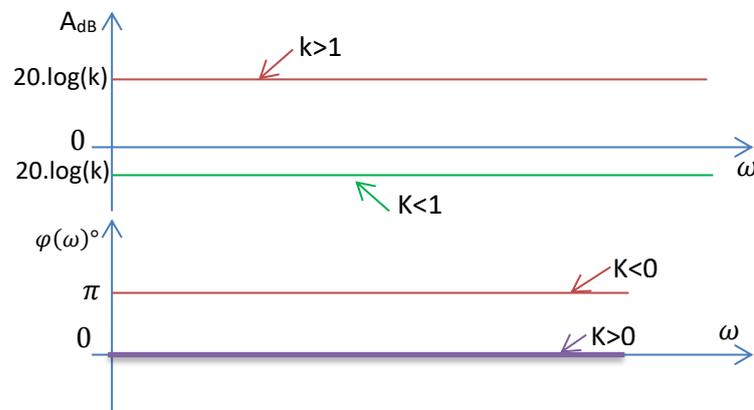
##### a- Tracé d'une fonction de transfert d'un gain pur

$H(p) = k$ . La réponse en fréquence est :  $H(j \cdot \omega) = k$

$$A = \|H(j \cdot \omega)\| = k \Rightarrow A_{dB} = \|H(j \cdot \omega)\|_{dB} = 20 \cdot \log(k)$$

$$\text{si } k > 0 \Rightarrow A = k$$

$$\text{et si } k < 0 \Rightarrow k = -k_1 \Rightarrow A = \sqrt{(-k_1)^2} = k_1$$



##### b- Tracé asymptotique de Bode d'un intégrateur pur

$$f(p) = \frac{1}{p^\alpha} \Rightarrow f(j.\omega) = \frac{1}{(j.\omega)^\alpha}$$

Le gain en dB :  $A_{dB} = \|f(j.\omega)\|_{dB} = -20.\alpha.\log(\omega)$

On pose :  $A_{dB} = a.x$ , tels que:  $a = -20.\alpha$  et  $x = \log(\omega)$

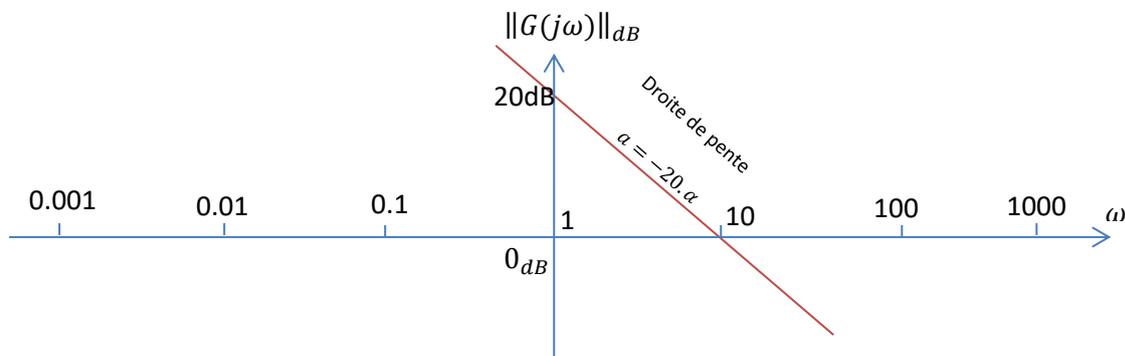
D'où  $A_{dB}$  est une droite de pente  $a = -20.\alpha$  dB/decade car :

Pour  $\omega = \omega_1$  on a  $A_{11} = -20.\alpha.\log(\omega_1)$

Pour  $\omega = 10.\omega_1$  on a  $A_{12} = -20.\alpha.\log(10.\omega_1) = -20.\alpha.\log(\omega_1) - 20.\alpha$

$$\text{La tangente } a = \frac{A_{12}-A_{11}}{\log(\omega_2)-\log(\omega_1)} = \frac{A_{12}-A_{11}}{\log(10.\omega_1)-\log(\omega_1)} = -20.\alpha \text{ dB}$$

Le tracé du gain  $A_{dB} = \|f(j.\omega)\|_{dB} = -20.\alpha.\log(\omega)$  sur le papier semi-logarithmique est comme suit :



La pente en octave :

Pour  $\omega = \omega_1$  on a  $A_{11} = -20.\alpha.\log(\omega_1)$

Pour  $\omega = \omega_2 = 2.\omega_1$  on a  $A_{12} = -20.\alpha.\log(2.\omega_1) = -20.\alpha.\log(\omega_1) - 20.\alpha.\log(2)$

$$\text{La tangente } a = \frac{A_{12}-A_{11}}{\log(\omega_2)-\log(\omega_1)} = \frac{A_{12}-A_{11}}{\log(2.\omega_1)-\log(\omega_1)} = -6.\alpha \text{ dB/octave}$$

Si  $G(p) = p$ , le tracé de Bode sera juste une droite de pente +20dB/décade (pente positive).

### c- Tracé asymptotique d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

$$G(p) = \frac{k}{1 + \tau.p} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{1 + \tau.j.\omega}$$

Le module arithmétique de  $G(j.\omega)$  :

$$\|G(j\omega)\| = \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Le module en décibel :

$$A_{dB} = 20.\log(\|G(j\omega)\|) = 20.\log\left(\frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}\right) = 20.\log(k) - 10.\log(1 + \tau^2\omega^2)$$

L'argument de  $G(j. \omega)$  :

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \arg(G(j \omega)) = \arg\left(\frac{k}{1 + \tau.j.\omega}\right) \\ &= -\arctg(\tau.\omega)\end{aligned}$$

Calcul des asymptotes :

$\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{dB} = 20.\log(k)$  représente une asymptote horizontale.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_{dB} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [20.\log(k) - 10.\log(1 + \tau^2\omega^2)]$$

$A_{dB} \rightarrow 20.\log(k) - 20.\log(\tau\omega)$  ce terme représente un terme d'une asymptote (droite) d'équation :  $A = 20.\log\left(\frac{k}{\tau}\right) - 20.\log(\omega)$ .

La droite est sous la forme :  $y = a.x + b$  avec  $a = -20dB/décade$

Les deux droites se coupent lorsque :

$$20.\log(k) = 20.\log(k) - 20.\log(\tau) - 20.\log(\omega) \Rightarrow -20.\log(\tau) = 20.\log(\omega)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$$

Donc les deux droites se coupent à la pulsation  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  (pulsation de cassure est aussi la pulsation de coupure du filtre.

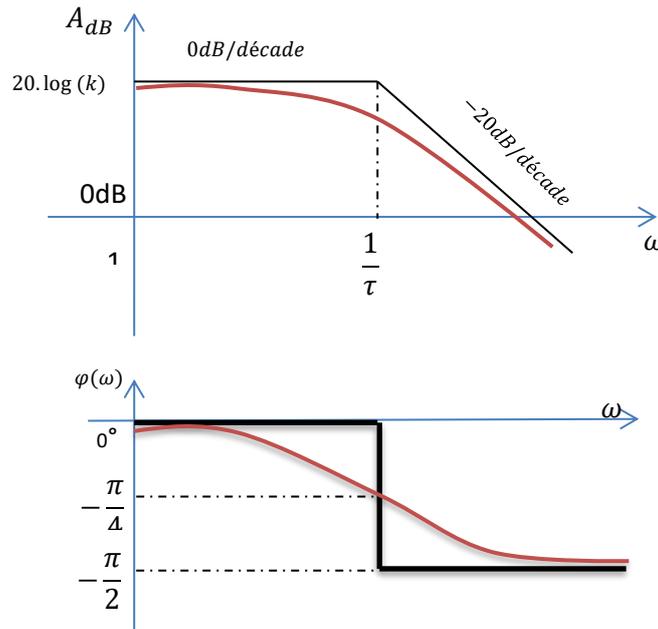
Pour les phases :  $\varphi(\omega) = -\arctg(\tau.\omega)$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Et  $\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Le tracé asymptotique de Bode sera représenté sur la figure ci-dessous



#### d- Tracé asymptotique d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre :

Rappelons la fonction de transfert du système du second ordre qui s'écrit comme suit :

$$H(p) = \frac{k}{\omega_n^2 + \frac{2 \cdot h}{\omega_n} p + 1}$$

Comme il a été mentionné dans les précédents chapitres, les pôles du système peuvent être de nature réels pur négatifs ou complexes, et cela dépend du coefficient d'amortissement.

##### d-1. Cas où le système est sur amorti ( $h > 1$ ) :

Le dénominateur possédant deux racines réelles strictement négatifs :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \text{ et } p_2 = -\frac{1}{\tau_2} \quad (\tau_1 > \tau_2)$$

On peut alors factoriser la fonction de transfert comme suit :

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{k \cdot \frac{\omega_n^2}{p_1 \cdot p_2}}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{p_2}\right)}$$

$$H(j \cdot \omega) = \frac{k}{(1 + \tau_1 \cdot \omega \cdot j) \cdot (1 + \tau_2 \cdot \omega \cdot j)} \Rightarrow \|H(j \cdot \omega)\| = \frac{k}{\sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)}}$$

$$\|H(j \cdot \omega)\|_{dB} = 20 \cdot \log(k) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)}\right) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{(1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)}\right)$$

On obtient les expressions des asymptotes en calculant les limites suivantes :

$$\text{Pour } \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \\ \text{et } \omega \ll \frac{1}{\tau_1} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)} \rightarrow 1$$

On obtient l'asymptote horizontale suivante :  $\|H(j \cdot \omega)\|_{dB} = 20 \cdot \log(k)$ .

- Tracé asymptotique pour le terme  $-20 \cdot \log\left(\sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)}\right)$  :

$$\text{Si } \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \\ \text{et } \omega \ll \frac{1}{\tau_1} \end{cases} \Rightarrow -20 \cdot \log(\sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)}) \rightarrow 0$$

$$\text{Si } \begin{cases} \omega \rightarrow +\infty \\ \text{et } \omega \gg \frac{1}{\tau_1} \end{cases} \Rightarrow -20 \cdot \log(\sqrt{(1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2)}) \rightarrow -20 \cdot \log(\tau_1 \cdot \omega) = y \text{ (représente une droite de pente -20dB/décade).}$$

- Tracé asymptotique pour le terme  $-20 \cdot \log(\sqrt{(1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)})$  :

$$\text{Si } \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \\ \text{et } \omega \ll \frac{1}{\tau_2} \end{cases} \Rightarrow -20 \cdot \log(\sqrt{(1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)}) \rightarrow 0$$

$$\text{Si } \begin{cases} \omega \rightarrow +\infty \\ \text{et } \omega \gg \frac{1}{\tau_2} \end{cases} \Rightarrow -20 \cdot \log(\sqrt{(1 + \tau_2^2 \cdot \omega^2)}) \rightarrow -20 \cdot \log(\tau_2 \cdot \omega) = z \text{ (représente une droite de pente -20dB/décade).}$$

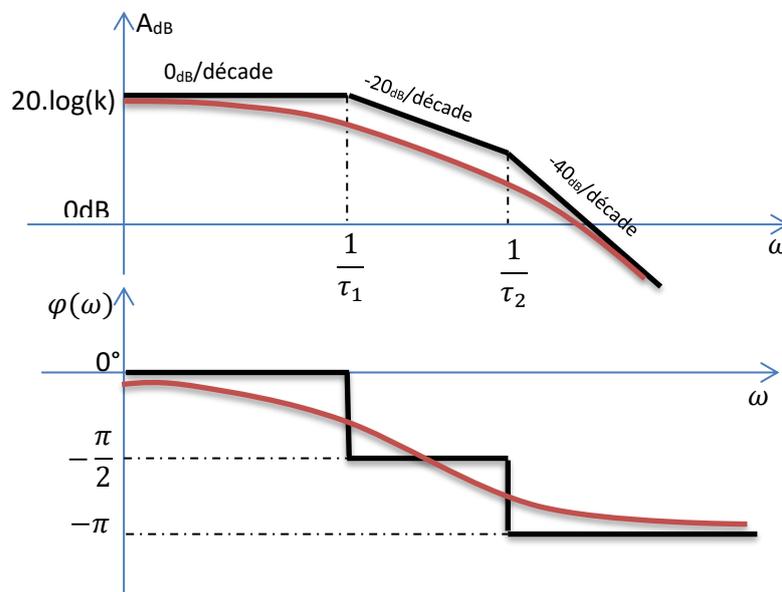
- Argument de  $H(j \cdot \omega)$  :

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = \arg(k) - [\arg(1 + \tau_1 \cdot \omega) + \arg(1 + \tau_2 \cdot \omega)]$$

$$\text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = 0 - [\arctg(\tau_1 \cdot \omega) + \arctg(\tau_2 \cdot \omega)]$$

$$\text{Pour } \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \\ \text{et } \omega \ll \frac{1}{\tau_i} \end{cases}, -\arctg(\tau_i \cdot \omega) = 0 \text{ avec } i=\{1,2\}$$

$$\text{Sinon, pour } \begin{cases} \omega \rightarrow +\infty \\ \text{et } \omega \gg \frac{1}{\tau_i} \end{cases}, -\arctg(\tau_i \cdot \omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ avec } i=\{1,2\}$$



#### d-2. Cas mal-amorti ( $h < 1$ ):

On rappelle que le module arithmétique est donné par :

$$\|H(j \cdot \omega)\| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \frac{(\omega)^2}{\omega_n^2})^2 + (\frac{2 \cdot h}{\omega_n} \cdot \omega)^2}}$$

Le module en décibel est donné comme suit :

$$A_{dB} = 20 \cdot \log(k) - 20 \cdot \log \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot h}{\omega_n} \cdot \omega\right)^2} \right)$$

$$A_{dB} = 20 \cdot \log(k) - 20 \cdot \log \left( \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot (4 \cdot h^2 - 2) + 1} \right)$$

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \omega \ll \omega_n \\ \omega \rightarrow 0 \end{array} \right.$ , on a  $\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot (4 \cdot h^2 - 2) + 1} \approx 1$ , donc  $A_{1dB} = 20 \cdot \log(k)$  (le terme représente une droite horizontale)

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \omega \gg \omega_n \\ \omega \rightarrow +\infty \end{array} \right.$ , on a  $\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_n^4} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \cdot (4 \cdot h^2 - 2) + 1} \approx \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ , donc  $A_{2dB} = 20 \cdot \log(k) - 40 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

(L'expression représente une asymptote de pente -40dB/décade), cette droite se coupe avec la droite  $A_{2dB}$  à  $\omega = \omega_n$

**L'étude asymptotique des phases :**

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2 \cdot h \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\arctg\left(\frac{2 \cdot h \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

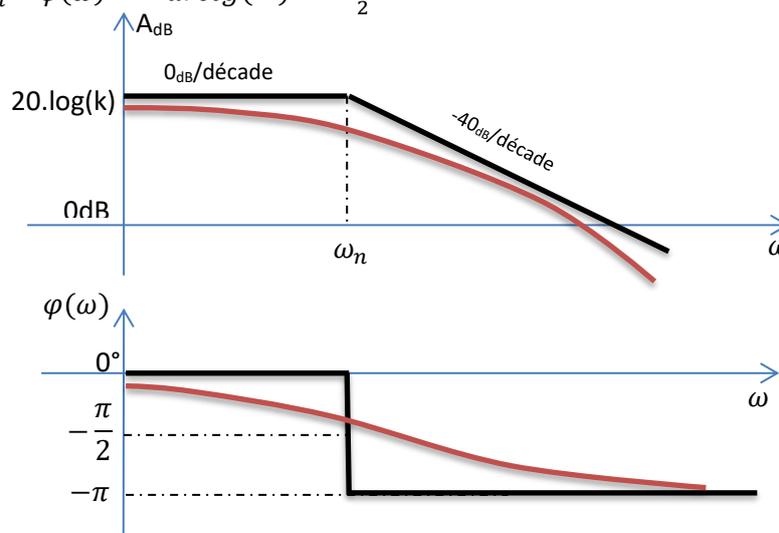
- Si  $\left\{ \begin{array}{l} \omega \ll \omega_n \\ \omega \rightarrow 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$
- Si  $\left\{ \begin{array}{l} \omega \gg \omega_n \\ \omega \rightarrow +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \frac{2 \cdot h \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$  quand  $\omega \rightarrow +\infty$

On a :

$$\frac{2 \cdot h \cdot \omega_n \cdot \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \approx \frac{2 \cdot h \cdot \omega_n}{-\omega} \rightarrow 0^-$$

Donc :  $\varphi(\omega) = -\arg(0^-) = -\pi$

- Si  $\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi(\omega) = -\arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2}$



**Note :**

Un système de fonction de transfert  $G(p)$  est dit à déphasage minimal s'il ne possède :

- 1- Ni de zéro à partie réelle positive ;
- 2- Ni de pôles à partie réelle positive ;
- 3- Ni de retard pur.

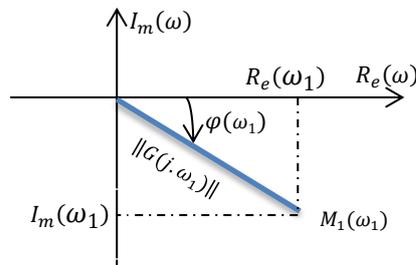
Dans ce cas, le digramme des gains correspond à celui des phases. Par contre, dans le cas où le système est à déphasage non-minimal, il n'y aura pas de correspondance entre le diagramme des gains  $A_{dB}$  et celui des phases  $\varphi(\omega)$ .

## V- Diagramme de Nyquist

Etant donné que les fonctions de transfert  $G(j.\omega)$  représente un nombre complexe, alors  $G(j.\omega) = R_e(\omega) + j.I_m(\omega)$ .

Le tracé de Nyquist est la représentation de  $G(j.\omega)$  dans le plan complexe, ou bien représenter le lieu de  $G(j.\omega)$  par les coordonnées polaires  $G(j.\omega) = \|G(j.\omega)\|.e^{j.\varphi(\omega)}$ . Ce lieu doit être gradué dans le sens des  $\omega$  croissants.

A une pulsation  $\omega_1$ , on peut représenter  $G(j.\omega_1)$ , par un point  $M_1$  dans le plan complexe.



Soit  $M_1(\omega)$  un point quelconque d'abscisse  $R_e(\omega)$  du plan complexe et d'ordonnée  $I_m(\omega)$ . Quand  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , alors le point  $M_1$  décrira dans le plan complexe un lieu appelé « Lieu de Nyquist ou diagramme de Nyquist ».

### V-1. Construction du lieu de Nyquist dans le cas général

A partir des diagrammes de Bode, il est facile d'obtenir l'allure du lieu de Nyquist, en déterminant :

- 1- Les points de départ à  $\omega \rightarrow 0$  ;
- 2- Les points d'arrivée à  $\omega \rightarrow +\infty$ .

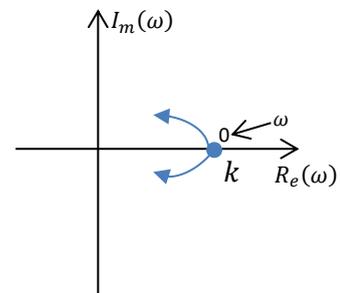
#### a- Point de départ à $\omega \rightarrow 0$

##### a-1. Si $G(j.\omega)$ ne possède pas de pôles à l'origine

$$G(p) = K \frac{(1 + \dots + a_m p^m)}{(1 + \dots + b_n p^n)}$$

$$\|G(0)\| = k, \quad k > 0$$

$$\varphi(0) = 0^\circ$$



##### a-2. Si $G(j.\omega)$ possède un pôle à l'origine

$$G(p) = \frac{1}{p} \left[ K \frac{(1 + \dots + a_m p^m)}{(1 + \dots + b_n p^n)} \right]$$

$$G(j.\omega) = \frac{1}{j.\omega} \left[ K \frac{(1 + \dots + a_m (j.\omega)^m)}{(1 + \dots + b_n (j.\omega)^n)} \right]$$

$$\|G(0)\| = +\infty$$

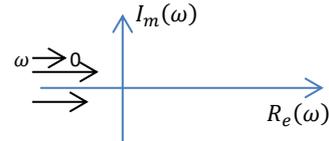
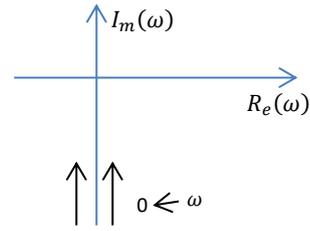
$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$$

**a-3. Si  $G(j.\omega)$  possède deux pôles à l'origine :**

$$G(p) = \frac{1}{p^2} \left[ K \frac{(1 + \dots + a_m p^m)}{(1 + \dots + b_n p^n)} \right]$$

$$\|G(0)\| = +\infty$$

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$



**b- Points d'arrivées  $\omega \rightarrow +\infty$ .**

$$G(p) = \left[ \frac{(b_0 + \dots + b_m p^m)}{(a_0 + \dots + a_n p^n)} \right]$$

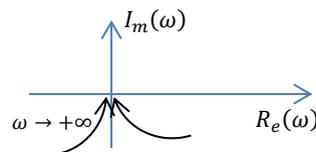
$$G(j.\omega) = \left[ \frac{(b_0 + \dots + b_m (j.\omega)^m)}{(a_0 + \dots + a_n (j.\omega)^n)} \right]$$

$$G(0) = k = \frac{b_0}{a_0}$$

- Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a  $G(j.\omega) \rightarrow \frac{b_m}{a_n} \cdot \left( \frac{1}{(j.\omega)^{n-m}} \right)$

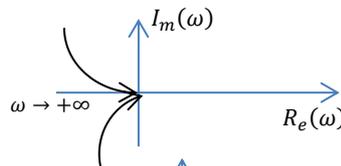
**b-1. Si  $n - m = 1$  :**

$$\begin{cases} \|G(j.\omega)\| \rightarrow 0 \\ \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



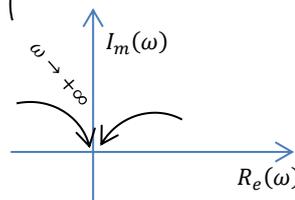
**b-2. Si  $n - m = 2$  :**

$$\begin{cases} \|G(j.\omega)\| \rightarrow 0 \\ \varphi(\omega) \rightarrow -\pi \end{cases}$$



**b-2. Si  $n - m = 3$  :**

$$\begin{cases} \|G(j.\omega)\| \rightarrow 0 \\ \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

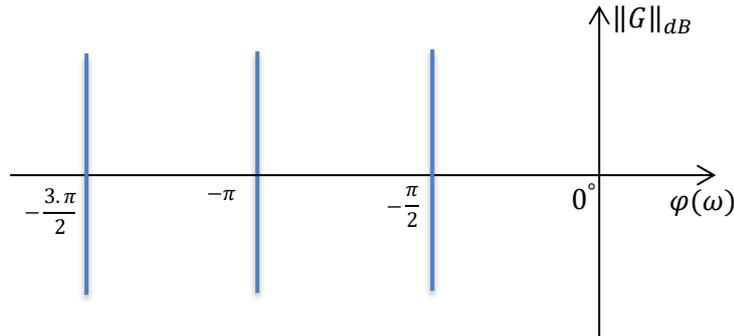


Une fois les points de départ et d'arrivée identifiés, on utilise le diagramme de Bode (phase) pour relier les deux points. On détermine les intersections du lieu avec les axes.

**c- Déterminer les points d'intersection avec les axes horizontaux et verticaux**  
**VI- Diagramme de Black**

Dans le plan dénommé plan de Black, on représente la réponse en fréquence, en portant en abscisse l'argument  $\varphi(\omega)$  exprimé en degré avec l'échelle linéaire, et en ordonnée le module  $\|G\|_{dB}$  en décibel sur l'échelle linéaire de lieu obtenu quand  $\omega$  varie de 0 à  $\infty$  s'appelle le lieu de Black. Pour tracer le lieu de Black, on utilise comme aide les tracés asymptotiques de Bode.

Le lieu de Black est représenté sur les axes représentés par la figure ci-dessous :



**Remarque :**

L'étude de la stabilité d'un système asservi linéaire et continu peut être faite soit par l'étude des pôles en se focalisant sur la nature de la partie réelle, ou bien via un critère algébrique de Routh, sinon par une troisième méthode qui est l'étude par la méthode graphique selon le critère de Rivers. Ce point fera l'objet du chapitre suivant.