Chapitre 3

Analyse dans le domaine temporel d'un système asservi

Introduction

Une étude complète d'un système linéaire et continu est composée de deux volets, une étude temporelle, et une étude fréquentielle.

Dans la première étude, nous nous intéressons aux réponses du système à des entrées échelon, rampe et impulsionnelle, en analysant leur partie transitoire et leur partie permanente.

I- Système du premier ordre

a- Mise en équation : les systèmes du 2^{nd} ordre sont des systèmes régis par une équation différentielle de la forme :

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k.e(t)$$

$e(t)$ étant l'entrée, et $s(t)$ est la sortie du système.

En considérant les conditions initiales sont nulles, l'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est :

$$S(p) = \frac{k}{1 + \tau p}.E(p)$$

$G(p) = \frac{k}{1+\tau p}$ est la forme canonique de la fonction de transfert du système du premier ordre.

$G(0) = k$: représente le gain statique, généralement c'est un réel positif.

τ : est la constante de temps.

Exemple :

Calcul de τ et de k pour un système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{40}{p+8}$

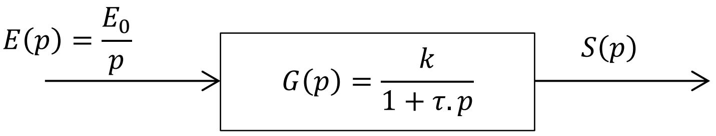
- écrire cette fonction sous la forme canonique :

$$G(p) = \frac{40}{8.(1+\frac{1}{8}p)} \Rightarrow G(p) = \frac{5}{(1+0.125\times p)}$$

Le gain statique : $G(0) = 5$

La constante de temps : $\tau = 0.125\ s$

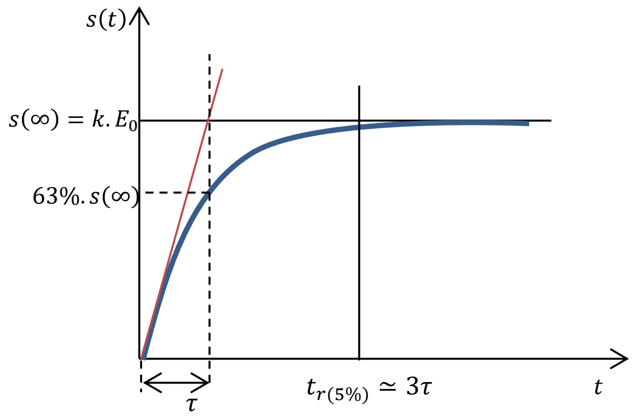
b- Réponse à un échelon d'un système du 1er ordre : « en boucle ouverte »



$$S(p) = G(p).E(p)$$

$$S(p) = \frac{k.E_0}{p(1+\tau.p)} \Rightarrow S(p) = \frac{k.E_0}{p.\tau.(p+\frac{1}{\tau})}$$

En appliquant la TL^{-1}, on trouve l'expression de la sortie dans le domaine de temps suivantes :



$$s(t) = k.E_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

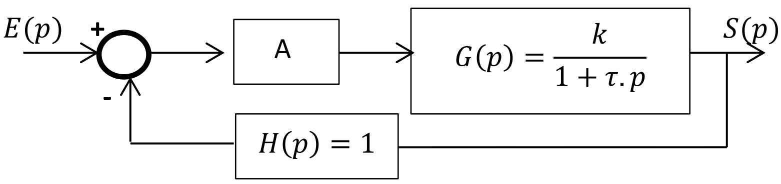
On note que : $s(\infty) = k.E_0 \Rightarrow$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = k.E_0$$

$$s(\tau) = 0.632.k.E_0$$

- La pente de la tangente à l'origine vaut : $\frac{k.E_0}{\tau}$
- Temps de réponse : $t_{r(5\%)} \simeq 3\tau$

C- Réponse du système du 1er ordre « en boucle fermée »



La fonction de transfert du système en boucle ouverte :

$$T_{bo}(p) = A \times G(p) \times H(p) = \frac{A.k}{1+\tau p}$$

La fonction de transfert du système en boucle fermée est : $F_{bf}(p) = \frac{T'(p)}{1+T_{bo}(p)}$

Telle que $T'(p)$ représente la fonction de transfert des éléments existants sur la chaine directe, qui sont : $T'(p) = A \times G(p) = \frac{A.k}{1+\tau p}$.

D'où :

$$F_{bf}(p) = \frac{\frac{A.k}{1+\tau p}}{1+\frac{A.k}{1+\tau p}} = \frac{\frac{A.k}{1+A.k}}{1+\frac{\tau}{1+A.k}\times p}$$

$k_{bf} = \frac{A.k}{1+A.k}$ est le gains statique du système en boucle fermée.

$\tau_{bf} = \frac{\tau}{1+A.k}$ est la constante de temps de l'asservissement (en boucle fermée).

Lorsqu'on analyse l'effet du gain A sur τ_{bf}, on remarque que plus A augment, plus la constante de temps diminue, et plus le système est rapide.

II- Système du second ordre

D'une manière générale, la fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par la forme canonique suivante:

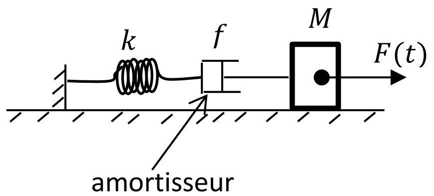
$$G(p) = \frac{k_s.{w_n}^2}{p^2+2.h.w_n.p+{w_n}^2}$$
$$= \frac{k_s}{\frac{1}{{w_n}^2}p^2+\frac{2.h}{w_n}.p+1}$$

k_s : Gain statique tel que $k_s = \lim_{p\to 0} G(p)$.

w_n: Pulsation propre du système non amorti (rad/s) , elle représente la pulsation à laquelle le système oscille en considérant la force d'excitation nulle.

h: Coefficient d'amortissement. L'amortissement est une atténuation de ses mouvements.

Exemple d'un système mécanique :



$$\boldsymbol{F(t) - k.x(t) - f_r.\dot{x}(t) = M.\ddot{x}(t)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x}(t) + \frac{f_r}{M}.\dot{x}(t) + \frac{k}{M}.x(t) = \frac{1}{M}.F(t)}$$

En appliquant le TL à l'équation différentielle, on trouve la fonction de transfert suivante :

$$p^2.X(p) + \frac{f_r}{m}.p.X(p) + \frac{k}{M}.X(p) = \frac{1}{M}F(p)$$

$$X(p).\left(p^2 + \frac{f_r}{M}.p + \frac{k}{M}\right) = \frac{1}{M}F(p)$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{M}}{p^2 + \frac{f_r}{M}.p + \frac{k}{M}}$$

Cette fonction de transfert est d'ordre 2, retrouvons les paramètres du système, en utilisant la forme canonique suivante :

$$G(p) = \frac{k_s.{w_n}^2}{p^2 + 2.h.w_n.p + {w_n}^2}$$

Par identification, on trouve l'expression de chaque paramètres en fonction de M, f_r et de k.

$$\begin{cases} k_s = \frac{1}{\sqrt{k.M}} \\ w_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \\ h = \frac{f}{2.M}\sqrt{\frac{M}{k}} \end{cases}$$

1- Réponse à un échelon « en boucle ouverte » : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$S(p) = G(p).E(p)$$
$$= \frac{k_s.{w_n}^2.E_0}{p(p^2 + 2.h.w_n.p + {w_n}^2)}$$

Plusieurs cas de figures peuvent être cités :

- Cas ou $h > 1$, $(\Delta > 0)$:
  Le polynôme $p^2 + 2.h.w_n.p + {w_n}^2$ possède 2 racines réelles strictement inférieures à zéro. L'expression de la sortie est :

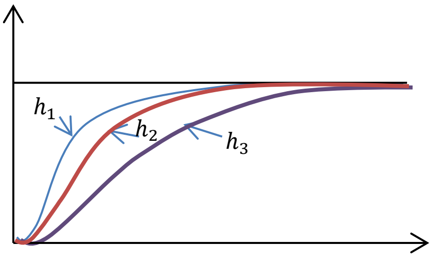
  $$s(t) = k.E_0\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]$$

  Avec $\tau_1 = \frac{1}{w_n}(h + \sqrt{h^2 - 1})$ et $\tau_2 = \frac{1}{w_n}(h - \sqrt{h^2 - 1})$

τ_1 est la première constante de temps.

τ_2 est la deuxième constante de temps.

La réponse du système aura une allure comme celle d'un système du premier ordre.



$h_1 < h_2 < h_3$

Le régime de la réponse est appelée apériodique :

Plus h augmente, plus la courbe $s(t)$ devient plate (système devient très lent car τ_1 *et* τ_2 augmente quand h).

- Cas ou $h = 1$: ($\Delta = 0$)

Le polynôme possède une racine réelle double strictement inferieur à zéro et ($p_1 = p_2 = -w_n$, avec ($E_0 = 1$)

$$s(t) = k.E_0\left[1 - \frac{\tau + t}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \quad , \qquad \tau = \frac{1}{w_n}$$

La réponse est analogue à celle d'un système du premier ordre ⇒ régime ou réponse apériodique.

- Cas $h < 1$: ($\Delta < 0$)

Dans ce cas, la fonction de transfert contient deux pôles complexes conjugués, l'expression ou la réponse du système à un échelon :

$$s(t) = k.e(t) - \frac{k}{\sqrt{1-h^2}}e^{-h.w_n.t}.\sin\left(w_d.t + \varphi\right)$$

Tel que :

$w_d = w_n\sqrt{1-h^2}$: représente la pulsation propre du système non amorti.

$\varphi = arctg\frac{\sqrt{1-h^2}}{h}$: représente le déphasage de la réponse.

$$w_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

La réponse est de nature

pseudo-oscillatoire.