Chapitre 2

Transformée de Laplace et représentation des Systèmes asservis (suite)

DEUXIEME PARTIE :

III- Représentation des systèmes asservis

Le comportement dynamique d'un système linéaire continu invariant et monovariable, est décrit par une équation différentielle d'ordre n, liant l'entrée et la sortie du système. L'intérêt de la transformée de Laplace pour l'étude de ce système réside dans la possibilité qu'elle offre de transformer les équations différentielles décrivant l'évolution dynamique du système en équations algébriques plus facile à manipuler.

III-1 . Représentation des systèmes par les équations différentielles linéaires

Il est bien connu que les équations différentielles constituent un type d'équations qui ont de nombreuses applications dans la description des lois physiques.

a- **Linéarité et théorème de superposition :** La notion de linéarité est une propriété caractérisant une classe d'équations différentielles. Les systèmes qui sont représentés par ce type d'équations, sont des systèmes sur lesquels le principe de superposition est applicable.

b- **Causalité :** Un système causal est un système dont la sortie ne peut jamais précéder l'entrée.

III-2. Représentation des systèmes par la fonction de transfert

Soit un système linéaire monovariable (une seule entrée-une seule sortie), son comportement dynamique est décrit par une équation différentielle d'ordre n, liant l'entrée et la sortie suivante :

$$b_0.u(t) + b_1\frac{du(t)}{dt} + + \ldots\ldots\ldots + b_m.\frac{d^m u(t)}{dt^m} = a_0.y(t) + a_1\frac{dy(t)}{dt} + \ldots\ldots\ldots + a_n.\frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Avec $m \leq n$…………………………………………………………………………………………… ………..(1)

Où $u(t)$ et $y(t)$ sont l'entrée et la sortie respectivement, du système représenté sur la figure suivante :

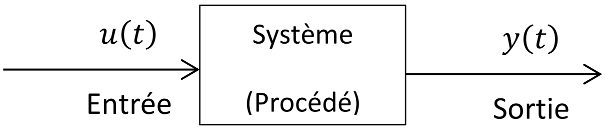


Figure 1

Si l'on suppose que le système est initialement à l'état stationnaire (t=0), et les variables $u(t)$ et $y(t)$ et leurs dérivées sont nulles à l'état initial :

$$u(0) = (\frac{du(t)}{dt})_{t=0} = \ldots = \left(\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}\right)_{t=0} = 0 \;\; et \quad y(0) = (\frac{dy(t)}{dt})_{t=0} = \ldots$$
$$= \left(\frac{d^{m-1}y(t)}{dt^{m-1}}\right)_{t=0} = 0$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle (relation1), et en appliquant la propriété de la transformée Laplace de la dérivée de la dérivée d'une fonction, avec les conditions initiales nulles, on obtient :

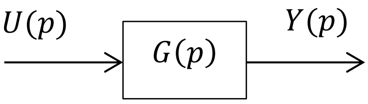
$$(b_0 + b_1.p + \ldots\ldots + b_m.p^m).U(p) = (a_0 + a_1.p + \ldots\ldots + a_n.p^n).Y(p)$$

D'où :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + \ldots\ldots + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + \ldots\ldots + a_n.p^n} = G(p)$$

$G(p)$ est appelée fonction de transfert.

Définition : soit un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. On appelle fonction de transfert du système. Le rapport des transformées de Laplace $Y(p)$ de la sortie $y(t)$ sur celle de l'entrée $U(p)$, avec les conditions initiales nulles (CI=0).



Le terme de , synonyme de fonction de transfert, est parfois utilisé.

Note : Il est important de remarque que la notion de fonction de transfert est associée à un système possédant des conditions initiales nulles.

L'étude du comportement du système lorsque les conditions initiales sont non nulles et plus complexe, notamment dans le cas de systèmes d'ordre élevé.

- **Racine du numérateur (zéros) et du dénominateur (pôles)**

La fonction de transfert $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0+b_1.p+ \ldots\ldots+b_m.p^m}{a_0+a_1.p+ \ldots\ldots+a_n.p^n}$ avec $m \leq n$ est une fraction rationnelle de deux polynômes en p. Il est donc possible de factoriser ces deux polynômes comme suit :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m.(p - z_m)(p - z_m) \ldots (p - z_m)}{a_n.(p - p_n).(p - p_{n-1}) \ldots (p - p_1)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelée les zéros de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être réels ou complexe. Les racines p_i qui annule le dénominateur sont appelés les pôles de la fonction de transfert ils peuvent aussi être réels ou complexe.

Le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de cas pôles et zéros jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

III-3. Expression de la sortie :

1- Dans le cas où les conditions initiales sont nulles

On considère qu'un système est régi par une équation différentielle :

$$b_0.u(t) + b_1\frac{du(t)}{dt} + + \ldots\ldots\ldots + b_m.\frac{d^m u(t)}{dt^m} = a_0.y(t) + a_1\frac{dy(t)}{dt} + \ldots\ldots\ldots + a_n.\frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Avec les (CI=0) et $m < n$.

On pose les hypothèses suivantes :

$$u(0) = \left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=0} = \ldots = \left(\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}\right)_{t=0} = 0$$

et

$$y(0) = (\frac{dy(t)}{dt})_{t=0} = \ldots = \left(\frac{d^{m-1}y(t)}{dt^{m-1}}\right)_{t=0} = 0$$

On déduit donc que :

$$\begin{cases} u(t) \overset{TL}{\rightarrow} U(p) \\ \dfrac{d^i u(t)}{dt^i} \overset{TL}{\rightarrow} p^i.U(p) \end{cases} \quad avec \;\; i = 1, \ldots.,m$$

et

$$\begin{cases} y(t) \overset{TL}{\rightarrow} Y(p) \\ \dfrac{d^j y(t)}{dt^j} \overset{TL}{\rightarrow} p^j.Y(p) \end{cases} \quad avec \;\; j = 1, \ldots.,n$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + \;\ldots\ldots + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + \;\ldots\ldots + a_n.p^n} \quad est\ la\ fonction\ de\ transfert$$

La sortie $Y(p)$ dans le domaine de Laplace est :

$$Y(p) = G(p).U(p)$$

2- Cas ou les conditions initiales ne sont pas nulles :

Si les hypothèses précédentes ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire les conditions initiales sont non nulles :

$$Y(p) = \frac{b_0 + b_1.p + \;\ldots\ldots + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + \;\ldots\ldots + a_n.p^n}.U(p) + \frac{I(p)}{a_0 + a_1.p + \;\ldots\ldots + a_n.p^n}$$

Avec $I(p)$ est un polynôme de degré $(m-1)$ fonction des conditions initiales.

On retiendra dans le cas général :

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}$$

$I(p)$ dépend de l'état initial du signal de sortie et du signal d'entrée. Si les conditions initiales sont nulles, on mettra $I(p) = 0$ et $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$. Cette dernière ne dépend pas de la nature du signal d'entrée. Par contre, le signal de sortie $Y(p)$ du système dépend du signal d'entrée et de la fonction de transfert.

III-4. Propriétés de la fonction de transfert

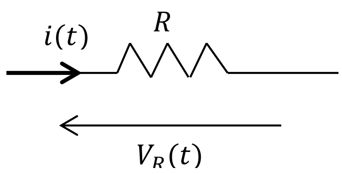
La fonction de transfert d'un système possède plusieurs propriétés utiles :

1- On peut déterminer la fonction de transfert d'un système à partir de son équation différentielle, en ignorant les conditions initiales. $G(p)$ est alors donnée par : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

2- La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la réponse à une impulsion : $Y(p) = G(p).\delta(p)$ avec $\delta(p) = 1 \Rightarrow Y(p) = G(p)$.

3- Les racines du dénominateur de la fonction de transfert sont les pôles du système, et celles du numérateur sont les zéros.

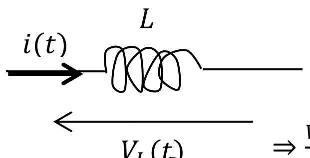
IV- Fonction de transfert des circuits électriques et notions d'impédances complexes



$$v_R(t) = R.i(t) \quad \Rightarrow \quad V_R(p) = R.I(p)$$

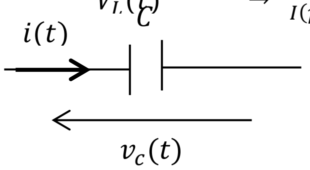
$$\frac{V_R(p)}{I(p)} =$$

$R\ \ est\ l'impedance\ complexe\ d'une\ résistanc$.



$$v_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad V_L(p) = L.p.I(p)$$

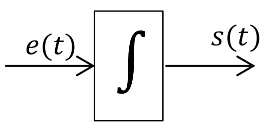
$\Rightarrow \frac{V_L(p)}{I(p)} = L.p$, $ça\ représente\ l'impedance\ complexe\ d'une\ self$



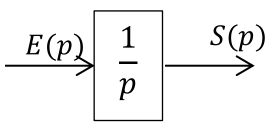
$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t).dt \Rightarrow V_c(p) = \frac{1}{C.p}.I(p) \Rightarrow \frac{V_c(p)}{I(p)} = \frac{1}{C.p}$$

représente l'impédance complexe d'une capacité.

- **Fonction de transfert d'un intégrateur et d'un dérivateur**

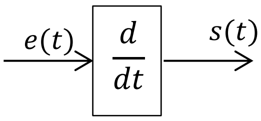


$$s(t) = \int e(t).dt \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{1}{p}.E(p)$$

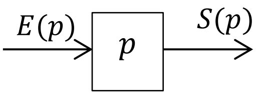


La fonction de transfert d'un intégrateur est : $\frac{S(p)}{I(p)} = \frac{1}{p}$

- **Fonction de transfert d'un dérivateur**



$s(t) = \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow S(p) = p.E(p)$



La fonction de transfert d'un dérivateur est : $\frac{S(p)}{I(p)} = p$

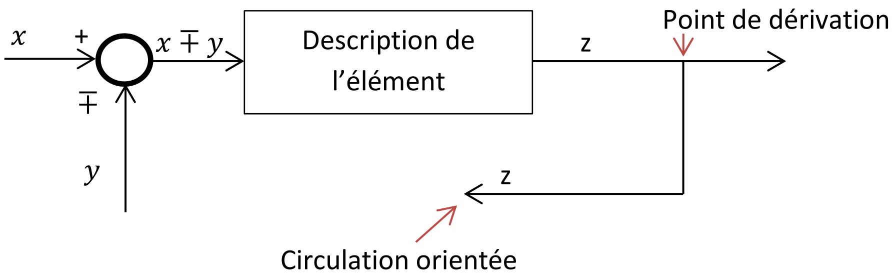
V- Schéma fonctionnel ou schéma bloc et théorème de transformation

Un schéma fonctionnel constitue une représentation graphique des systèmes physiques, indiquant les relations fonctionnelles existant entre éléments, et chaque élément sera évaluer selon sa contribution dans le fonctionnement du système asservi.

V-1. Notions fondamentales

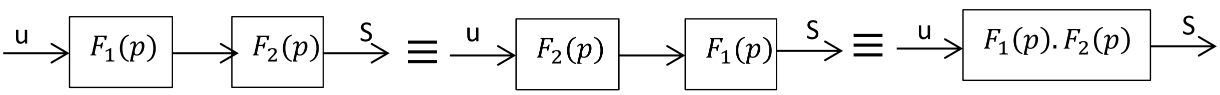
Un schéma fonctionnel est généralement constitué par un assemblage de 4 types d'éléments :

1- **Rectangulaire :** qui sert à représenter les éléments décrits par des fonctions mathématiques.
2- **Comparateur :** élément qui représenter la partie qui permet de faire la différence entre deux grandeurs.
3- **Points de dérivation**
4- **Flèches représentant la circulation orientée des signaux**

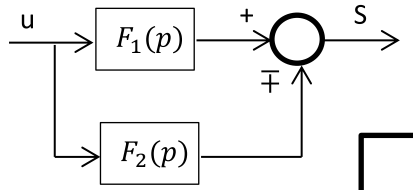


V-2. Schéma fonctionnel et schémas fonctionnels équivalents

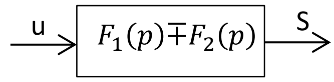
1- Mise en cascade :



2- Association d'éléments en parallèle, ou suppression d'une boucle d'actions :

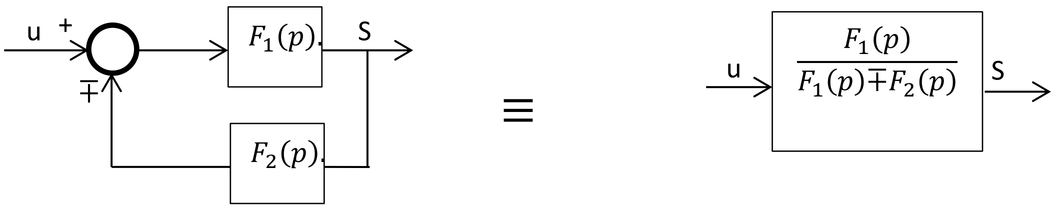


$\equiv$

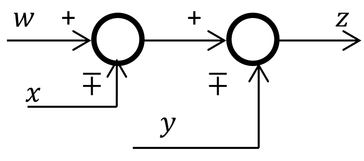


$$\boxed{S(p) = F_1(p).u \pm F_2(p).u}$$

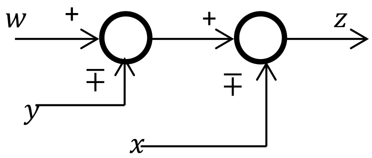
3- Schéma équivalent d'une boucle de retour



4- Changement de la disposition des comparateurs

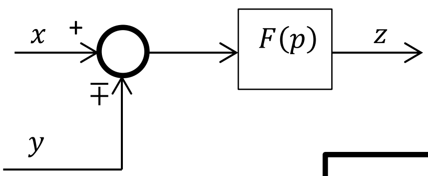


$\equiv$

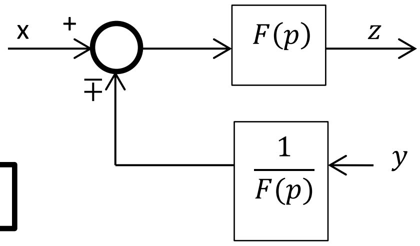


$$\boxed{z = w \pm x \pm y}$$

5- Déplacement d'un comparateur en amant d'un élément

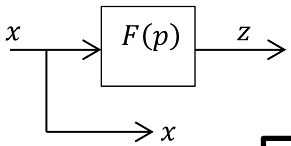


$\equiv$

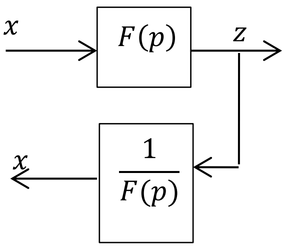


$$\boxed{z = F(p).x \mp y}$$

6- Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément

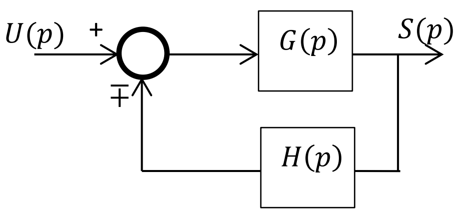


$\equiv$



$$\boxed{z = F(p).x}$$

V-3. Schéma bloc d'un système à retour unitaire et non unitaire



Un schéma fonctionnel d'un système donné sur la figure ci-contre est dit schéma fonctionnel à retour non unitaire.

Lorsque $H(p) = 1$, le schéma est dit à retour unitaire et on appelle le schéma fonctionnel de la figure La forme canonique d'un système.

- La fonction $G(p)$: appelée la fonction de transfert directe.
- La fonction $H(p)$: appelée la fonction de retour.
- $F(p) = H(p).G(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte.
- $F_1(p) = \frac{G(p)}{1+H(p).G(p)}$ est la fonction de transfert du système en boucle fermée.

VI- Schéma fonctionnel et expression de la sortie pour de signaux d'entrée multiples

Il est souvent nécessaire de connaitre le comportement d'un système quand on applique plusieurs entrées simultanément en ses différentes parties et on traite le comportement du système à chaque entrée, indépendamment des autres.

Le signal de sortie produit par toutes les entrées se déduit de la manière suivante :

1- Rendre tous les signaux d'entrée nuls, sauf un seul ;
2- Mettre le schéma fonctionnel sous la forme canonique ;
3- Calculer la sortie correspondante au signal d'entrée considéré, en gardant les autres entrées nulles ;
4- Répéter les mêmes étapes pour les autres entrées résistance ;
5- Ajouter (sommer) algébriquement toutes les réponses (grandeurs de sortie) calculées suivant les étapes 1 à 4 , cette somme est la grandeur de sortie totale obtenue quand tous les signaux d'entrées agissent ensemble.