Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2017−2018

Spécialité : Master 2 Académique, Options : AS ; AII
Module : *Commande Avancée*
Examen : Partiel, Date : Dimanche 07 Janvier 2018, Durée : 01h 45mn

IL EST DEMANDE DE DETAILLER TOUS LES CALCULS

Question de cours : (05,00 points)

1. quelle est l'hypothèse à vérifier pour garantir la *convergence* de l'*erreur de poursuite* dans une stratégie de *commande adaptative directe* ?
2. comment peut-on *identifier* un système *instable* ?
3. quelles sont les hypothèses à vérifier pour appliquer la *commande matricielle dynamique* ?
4. en faisant l'analogie avec la commande adaptative *directe*, préciser le rôle du *filtre de consigne* dans une *commande matricielle dynamique* ?

Exercice 1 : (05,00 points)

Le comportement dynamique d'un système est modélisé par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{b+c}{\frac{a}{b}s + b\,c} \tag{1}$$

Les *variations* des paramètres a, b et c sont données comme suit :

$$1 \leq a \leq 2; \quad 2 \leq b \leq 4; \quad 0,25 \leq c \leq 0,5$$

1. soit les deux intervalles $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ et $\beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}$ avec $\underline{\beta_{\min} > 0}$. Donner les résultats des *opérations sur les intervalles* suivantes : $\alpha + \beta$, $\alpha \times \beta$ et $1/\beta$.
2. écrire la fonction de transfert (**1**) du système sous la forme suivante :

$$G(s) = \frac{[b_{0_{\min}},\, b_{0_{\max}}]}{[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}]\, s + [a_{0_{\min}},\, a_{0_{\max}}]}$$

3. proposer un *modèle nominal* pour le système.

Exercice 2 : (05,00 points)

On désire concevoir une *commande matricielle dynamique* pour un système mécanique dont les premières valeurs de sa *réponse indicielle* sont résumées dans le Tableau 1.

t	0	1	2
$y(t)$	$0,25$	$0,50$	$0,75$

TABLE 1 – Réponse indicielle.

1. donner la *matrice dynamique* pour un horizon de *prédiction* $N_p = 2$ et un horizon de *commande* $N_u = 1$,

2. si $\Delta u(t) = 0$ pour $t < 0$, déduire la valeur de la *réponse libre*, c'est-à-dire $F\,X$,

3. sachant que la consigne désirée $y^d(t) = 1$, déterminer la commande à appliquer à $t = 0$ si l'*effort* et l'*erreur de poursuite* ne sont pas *pénalisés*.

Exercice 3 : (05,00 points)

On désire concevoir une commande adaptative *directe*, à base d'un retour d'état, pour imposer la trajectoire $y_m(t)$ définie par le *modèle de référence* suivant :

$$\dot{y}_m(t) = -a_m\, y_m(t) + b_m\, y^d(t), \quad a_m,\, b_m > 0$$

pour le système dynamique, à deux paramètres a et b *incertains*, suivant :

$$\dot{y}(t) = -a\, y(t) + b\, u(t)$$

où $y_m(t)$, $y^d(t)$, $y(t)$ et $u(t)$ sont respectivement la sortie du modèle de référence, la consigne désirée, la sortie et la commande du système à corriger.

1. donner l'*expression* de la commande $u(t)$,

2. on suppose que a et b sont *connus*, déterminer les paramètres de la commande $u(t)$,

3. donner l'équation différentielle caractérisant la dynamique de l'*erreur de poursuite* :

$$e(t) = y(t) - y_m(t),$$

lorsque les paramètres a et b sont *inconnus*.

4. en considérant une fonction de **Lyapunov** *quadratique*, déterminer les *adaptions* qui garantissent la convergence de l'erreur de poursuite $e(t)$.

Fin de l'épreuve

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2017−2018

Spécialité : Master 2 Académique, Option : AS et AII
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel

Solution

Question de cours : (05,00 points)

1. Le système doit être strictement positif réel.
2. En utilisant une commande adaptative.
3. Le système à commander doit être stable et la perturbation est constante.
4. Le filtre joue le rôle de modèle de référence.

Exercice 1. (05,00 points)

1. Résultats des opérations sur les intervalles :
   - $\alpha + \beta = [\alpha_{\min} + \beta_{\min}; \alpha_{\max} + \beta_{\max}]$,
   - $\alpha \times \beta = [\min E; \max E]$
     avec
     $$E = \{\alpha_{\min} \times \beta_{\min}, \alpha_{\min} \times \beta_{\max}, \alpha_{\max} \times \beta_{\min}, \alpha_{\max} \times \beta_{\max}\}$$
     ,
   - $\dfrac{1}{\beta} = \left[\dfrac{1}{\beta_{\max}}; \dfrac{1}{\beta_{\min}}\right]$
2. Les opérations sur les intervalles donnent :
   - $[b_{0_{\min}}, b_{0_{\max}}] = b + c = [2;\ 4] + [0,25;\ 0,5] = [2,25;\ 4,5]$,
   - $[a_{0_{\min}}, a_{0_{\max}}] = b\,c = [2;\ 4] \times [0,25; 0,5]$. Dans ce cas, l'ensemble E est :
     $$\begin{aligned} E &= \{2 \times 0,25;\ 2 \times 0,5;\ 4 \times 0,25;\ 4 \times 0,5\} \\ &= \{0,5;\ 1;\ 2\} \end{aligned}$$
     alors $[a_{0_{\min}}, a_{0_{\max}}] = [0,5;\ 2]$.
   - $[a_{1_{\min}}, a_{1_{\max}}] = \dfrac{a}{b} = \dfrac{[1;\ 2]}{[2;\ 4]} = [1;\ 2] \times [0,25;\ 0,5]$. L'ensemble E est donné comme suit
     $$\begin{aligned} E &= \{1 \times 0,25;\ 1 \times 0,5;\ 2 \times 0,25;\ 2 \times 0,5\} \\ &= \{0,25;\ 0,5;\ 1\} \end{aligned}$$
     alors $[a_{1_{\min}}, a_{1_{\max}}] = [0,25;\ 1]$.

$$G(s) = \frac{[2,25\,;\,4,5]}{[0,25\,;\,1]\,s + [0,5\,;\,2]}$$

3. Modèle nominale :

$$G(s) = \frac{\frac{b_{0_{\min}} + b_{0_{\max}}}{2}}{\frac{a_{1_{\min}} + a_{1_{\max}}}{2}\,s + \frac{a_{0_{\min}} + a_{0_{\max}}}{2}} = \frac{3,375}{0,625\,s + 1.25}$$

Exercice 2. (<u>05,00 points</u>)

1. Matrice dynamique : après l'application de l'échelon appliqué à $t = 0$, la sortie commence à évaluer à partir de la condition initiale $0,25$. Par conséquent,

$$g_1 = y(1) - y(0) = 0,50 - 0,25 = 0,25$$
$$g_2 = y(2) - y(0) = 0,75 - 0,25 = 0,50$$

alors la matrice dynamique est

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}$$

2. Réponse libre : à partir des données du Tableau des valeurs de la réponse indicielle, on ne peut pas déduire la valeur de l'horizon de stabilisation N_s. Théoriquement, on a

$$F\,X = \begin{bmatrix} 1 & g_2 - g_1 & \cdots & g_{N_p+N_s} - g_{N_s} \\ 1 & g_{N_p+1} - g_1 & \cdots & g_{N_p+N_s} - g_{N_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m(t) \\ \Delta(t-1) \\ \vdots \\ \Delta(t-N_s) \end{bmatrix}$$

3. Calcul de la commande $u(0)$: pour $t = 0$, seule la première composante de X est non nulle, alors

$$X = \begin{bmatrix} y_m(0) \\ \Delta(t-1) \\ \vdots \\ \Delta(t-N_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_m(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors

$$F\,X = \begin{bmatrix} y_m(0) \\ y_m(0) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u = (G^T\,Q\,G + R)^{-1} G^T\,Q\,(y^d - F\,X)$$

L'erreur de poursuite et l'effort ne sont pas pénalisés alors

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \left(\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix} + 1 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_m(0) \\ y_m(0) \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0,25 & 0,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix} + 1 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,25 & 0,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y_m(0) \\ 1 - y_m(0) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{0,3125 + 1} \begin{bmatrix} 0,25 & 0,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y_m(0) \\ 1 - y_m(0) \end{bmatrix} \\
&= \frac{0,75\,(1 - y_m(0))}{1,3125} = 0.57143\,(1 - y_m(0))
\end{aligned}$$

alors $u(0) = u(-1) + \Delta u(0) = 0 + 0.57143\,(1 - y_m(0)) = 0.57143\,(1 - y_m(0))$.

Exercice 3. (05,00 points)

1. Expression de la loi de commande $u(t)$:

$$u(t) = k_1\, y(t) + k_2\, y^d(t)$$

2. Le système en boucle fermée est :

$$\dot{y}(t) = -a\, y(t) + b\,(k_1\, y(t) + k_2\, y^d(t) = (b\, k_1 - a)\, y(t) + b\, k_2\, y^d(t)$$

Par identification avec le modèle de référence :

$$\dot{y}_m(t) = -a_m\, y_m(t) + b_m\, y^d(t)$$

on obtient $b\, k_1 - a = -a_m$ et $b\, k_2 = b_m$, alors

$$k_1^* = \frac{a - a_m}{b}, \quad k_2^* = \frac{b_m}{b} \tag{1}$$

3. En boucle fermée, on a :

$$\dot{y}(t) = (b\, k_1(t) - a)\, y(t) + b\, k_2(t)\, y^d(t) \tag{2}$$

A partir de (1), on déduit les estimés suivantes :

$$\hat{b} = \frac{b_m}{k_2^*}, \quad \hat{a} = a_m + b_m\, \frac{k_1^*}{k_2^*}$$

En substituant a et b par leurs estimées $\hat{a}$ et $\hat{b}$ dans (2), il vient

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \left(\frac{b_m}{k_2^*}\,k_1(t) - a_m - b_m\,\frac{k_1^*}{k_2^*}\right) y(t) + \frac{k_2(t)}{k_2^*}\,b_m\,y^d(t)\\ &= \left(\frac{b_m}{k_2^*}(\,k_1(t) - k_1^*) - a_m\right) y(t) + \frac{k_2(t)}{k_2^*}\,b_m\,y^d(t)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) - \dot{y}_m(t) &= \left(\frac{b_m}{k_2^*}(\,k_1(t) - k_1^*) - a_m\right) y(t) + \frac{k_2(t)}{k_2^*}\,b_m\,y^d(t) + a_m\,y_m(t) - b_m\,y^d(t)\\ \dot{y}(t) - \dot{y}_m(t) &= -a_m\,(y(t) - y_m(t)) + \frac{b_m}{k_2^*}(\,k_1(t) - k_1^*)\,y(t) + \left(\frac{k_2(t)}{k_2^*}\,b_m - b_m\right) y^d(t)\\ \dot{y}(t) - \dot{y}_m(t) &= -a_m\,(y(t) - y_m(t)) + \frac{b_m}{k_2^*}(\,k_1(t) - k_1^*)\,y(t) + \frac{b_m}{k_2^*}\,(k_2(t) - k_2^*)\,y^d(t)\end{aligned}$$

Ce qui conduit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}(t) = -a_m\,e(t) + \frac{b_m}{k_2^*}\,\tilde{k}_1(t)\,y(t) + \frac{b_m}{k_2^*}\,\tilde{k}_2(t)\,y^d(t)$$

4. En choisissant la fonction de la **Lypunov** (quadratique) suivante :

$$V(e(t),\,\tilde{k}_1(t),\,\tilde{k}_2(t)) = \frac{e^2(t)}{2} + \frac{\tilde{k}_1^2(t)}{2} + \frac{\tilde{k}_2^2(t)}{2}$$

On obtient pour la dérivée de $V(e(t),\,k_1(t),\,k_2(t))$

$$\begin{aligned}\frac{dV(e(t),\tilde{k}_1(t),\tilde{k}_2(t))}{dt} &= e(t)\,\dot{e}(t) + \tilde{k}_1(t)\,\dot{\tilde{k}}_1(t) + \tilde{k}_2(t)\,\dot{\tilde{k}}_2(t)\\ \dot{V} &= e(t)\left(-a_m\,e(t) + \frac{b_m}{k_2^*}\,\tilde{k}_1(t)\,y(t) + \frac{b_m}{k_2^*}\,\tilde{k}_2(t)\,y^d(t)\right) + \tilde{k}_1(t)\,\dot{\tilde{k}}_1(t) + \tilde{k}_2(t)\,\dot{\tilde{k}}_2(t)\\ &= -a_m\,e^2(t) + \tilde{k}_1\left(\frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y(t) + \dot{\tilde{k}}_1(t)\right) + \tilde{k}_2\left(\frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y^d(t) + \dot{\tilde{k}}_2(t)\right)\end{aligned}$$

Pour avoir $\dot{V} \leq 0$, on impose

$$\frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y(t) + \dot{\tilde{k}}_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y^d(t) + \dot{\tilde{k}}_2(t) = 0$$

ce qui conduit aux adaptations suivantes :

$$\dot{\tilde{k}}_1(t) = -\frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y(t) \quad \text{et} \quad \dot{\tilde{k}}_2(t) = -\frac{b_m}{k_2^*}\,e(t)\,y^d(t)$$

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2017−2018

Spécialité : Master 2 Académique, Options : AS ; AII
Module : *Commande Avancée*
Examen : Rattrapage, Date : Dimanche 04 Février 2018, Durée : 01h 30mn

IL EST DEMANDE DE DETAILLER TOUS LES CALCULS

Question de cours : (04,00 points)

1. citer *deux* méthodes utilisées pour la synthèse d'une *commande adaptative directe.*
2. quel est l'intérêt de considérer $\Delta u(k) = 0$ pour k allant de $N_u + 1$ (N_u est l'horizon de *commande*) à N_p (N_p est l'horizon de *prédiction*) dans une *commande matricielle dynamique* ?

Exercice 1 : (05,00 points)

Le comportement dynamique d'un système est décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0,5\, z^{-1}}$$

1. montrer que l'évolution de la sortie $y(k)$ du système est décrite par une *équation aux différences* de la forme
$$y(k) = 0,5\, y(k-1) + u(k-1)$$
2. sachant que $y(0) = 0$, calculer les *quatre premières valeurs* de la réponse $y(k)$ (pour k allant de 1 à 4) pour une entrée du type *échelon unité*
$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$
3. donner la *matrice dynamique* pour un horizon de *prédiction* $N_p = 4$ et un horizon de *commande* $N_u = 3$.

Exercice 2 : (06,00 points)

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{y}(t) = -y(t) + b\, u(t)$$

dont le paramètre b est *incertain*. Les variables $y(t)$ et $u(t)$ représentent respectivement la sortie et la commande du système.

On désire concevoir une *commande adaptative directe*, en utilisant la méthode du *gradient* (**MIT** rule), pour imposer en boucle fermée la dynamique suivante

$$\dot{y}_m(t) = -y_m(t) + b_m\, y^d(t)$$

avec $y_m(t)$ et $y^d(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée (consigne désirée) du *modèle de référence.* Le paramètre b_m est *connu* et supposé positif.

Pour réaliser cet objectif, on propose d'utiliser une loi de commande de la forme

$$u(t) = k(t)\, y^d(t)$$

où $k(t)$ est un gain *variable.*

1. on suppose que le paramètre b est *connu*, déterminer le gain k^* de la loi de commande,
2. donner l'*expression générale* de la loi d''adaptation du gain $k(t)$ (règle **MIT**),
3. montrer que la *fonction de sensibilité* est donnée comme suit

$$\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} = \frac{b_m}{k^*\,(s+1)}\, y^d(t)$$

4. déduire l'expression de la loi d'adaptation du gain $k(t)$,
5. donner le schéma de simulation,
6. est-il indispensable de connaître la valeur de k^* pour *implémenter* la stratégie de commande ? Argumenter.

Exercice 3 : (05,00 points)

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t)\, x_2(t) + x_1(t) - x_2(t)\end{aligned}$$

1. mettre le système sous forme d'un système *linéaire* à *un seul paramètre* *variable* $p(t)$,
2. donner l'expression du paramètre $p(t)$,
3. donner la condition de *stabilité* asymptotique du système.

Fin de l'épreuve

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2017−2018

Spécialité : Master 2 Académique, Option : AS et AII
Module : *Commande Avancée*, Examen : Rattrapage

Solution

Question de cours : (04,00 points)

1. Méthode de la fonction de **Lyapunov** et Méthode du gradient (Règle **MIT**).
2. Pour simplifier le problème d'optimisation car un nombre de variables de décision (d'optimisation) important ($N_u = N_p$) n'améliore pas les performances.

Exercice 1. (05,00 points)

1. Équation aux différences :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - 0,5\,z^{-1}} \Rightarrow (1 - 0,5\,z^{-1})\,Y(z) = z^{-1}\,U(z)$$
$$\Rightarrow Y(z) - 0,5\,z^{-1}\,Y(z) = z^{-1}\,U(z) \Rightarrow Y(z) = 0,5\,z^{-1}\,Y(z) + z^{-1}\,U(z)$$

L'application de la transformée en Z inverse donne

$$y(k) = 0,5\,y(k-1) + u(k-1)$$

2. Les quatre premières valeurs de la sortie $y(k)$:

$$\begin{aligned} y(1) &= 0,5\,y(0) + u(0) = 0,5 \times 0 + 1 = 1 \\ y(2) &= 0,5\,y(1) + u(1) = 0,5 \times 1 + 1 = 1,5 \\ y(3) &= 0,5\,y(2) + u(2) = 0,5 \times 1,5 + 1 = 1,75 \\ y(4) &= 0,5\,y(3) + u(3) = 0,5 \times 1,75 + 1 = 1,875 \end{aligned}$$

3. Matrice dynamique pour $N_p = 4$ et $N_u = 3$:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 \\ g_4 & g_3 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1 & 0 \\ 1,75 & 1,5 & 1 \\ 1,875 & 1,75 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. (06,00 points)

1. Gain k^* de la loi de commande lorsque b est constant :

Le système en boucle fermée est

$$\dot{y}(t) = -y(t) + b\,k^*\,y^d(t)$$

Par identification avec le modèle de référence $\dot{y}_m(t) = -y_m(t) + b_m\,y^d(t)$, on obtient

$$b\,k^* = b_m \Rightarrow k^* = \frac{b_m}{b}$$

2. Expression générale de l'adaptation du gain $k(t)$:

D'après la règle **MIT**, on a

$$\dot{k}(t) = -\gamma\,e(t)\,\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)}$$

avec $e(t) = y(t) - y_m(t)$.

3. Fonction de sensibilité $\dfrac{\partial y(t)}{\partial k(t)}$:

Le système en boucle fermée est

$$\dot{y}(t) = -y(t) + b\,k\,y^d(t)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t)} &= -\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} + \frac{\partial\left[b\,k\,y^d(t)\right]}{\partial k(t)}\\
\frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)}\right) &= -\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} + b\,y^d(t)\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)}\right) + \frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} &= b\,y^d(t)\\
s\left(\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)}\right) + \frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} &= b\,y^d(t)\\
\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} &= \frac{b}{s+1}\,y^d(t)\\
\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} &= \frac{b_m}{k^*\,(s+1)}\,y^d(t)
\end{aligned}$$

4. Expression de l'adaptation du gain $k(t)$:

$$\dot{k}(t) = -\gamma\, e(t)\, \frac{b_m}{k^*\,(s+1)}\, y^d(t)$$

5. Schéma de simulation :

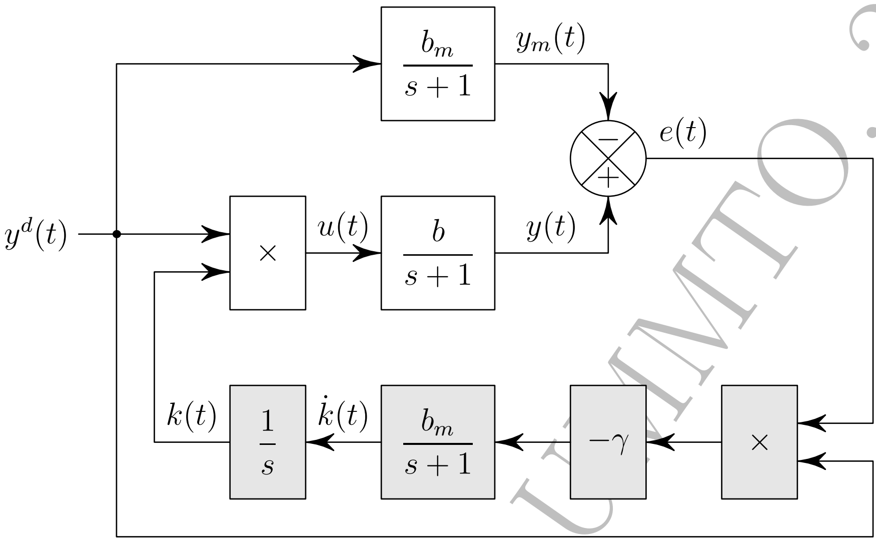


FIGURE 1 – Commande adaptative indirecte.

6. La connaissance de k^* n'est pas dispensable car elle peut être absorbée par γ comme suit

$$\dot{k}(t) = -\lambda\, e(t)\, \frac{b_m}{s+1}\, y^d(t)$$

avec $\lambda = \dfrac{\gamma}{k^*}$.

Exercice 3. (<u>05,00 points</u>)

1. Système sous forme d'un système linéaire à un seul paramètre :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_1^2(t) - 1 \end{bmatrix}$$

2. Expression de $p(t)$:

$$p(t) = x_1^2(t) - 1$$

3. Condition de stabilité :

Les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = \frac{p(t)}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (1)$$
$$\lambda_2 = \frac{p(t)}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (2)$$

avec $\Delta = p^2(t) - 4$.

Pour que le système soit asymptotiquement stable, il faut que la partie réel $\frac{p(t)}{2}$ doit être strictement négative, alors

$$p(t) < 0 \Rightarrow x_1^2(t) - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x_1(t) < 1 \text{ ou encore } |x_1(t)| < 1$$

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Électrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2018–2019

Spécialité : Master 2 Académique, Options : Automatique et Informatique Industrielle
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel, Date : Dimanche 20 Janvier 2019, Durée : 01h 45mn

IL EST DEMANDE DE DÉTAILLER TOUS LES DÉVELOPPEMENTS

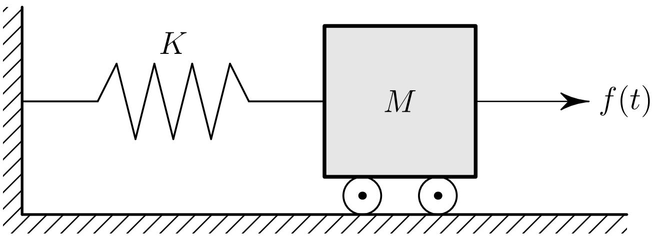
Questions de cours : (04,00 points)

1. Expliquer la différence entre un paramètre *incertain* et un paramètre *variable dans le temps*,
2. Peut-on formuler un problème de commande optimale avec un critère de la forme $J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))\, dt$ ($x^d(t)$ et $x(t)$ sont respectivement l'état désiré et l'état du système) ? Argumenter

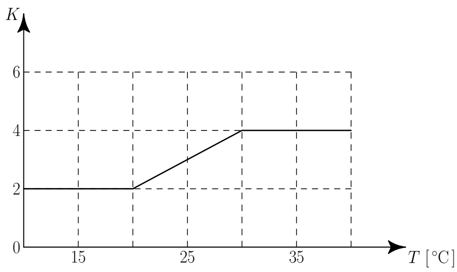
Exercice 1 : (05,00 points)

Soit le système mécanique de la Figure **1a**. Le ressort de raideur K exerce une force de rappel lorsque la masse M est soumise à la force $f(t)$.

1. En utilisant le formalise de **Lagrange**, écrire l'*équation différentielle* régissant la dynamique de la masse M,
2. On suppose que les condition initiales sont nulles $\dot{x}(0) = x(0) = 0$. On considère comme sortie la position $x(t)$ de la masse M. Déduire à partir de l'équation différentielle obtenue en **1** la *fonction de transfert* du système $G(s)$,
3. Le ressort est sensible à la température T de l'environnement. La Figure **1b** donne l'évolution de la raideur K du ressort en fonction de la température T. On demande de préciser le *type* de chaque paramètre du système,
4. On donne $M = 1$. Proposer un modèle nominal, sous forme de fonction de transfert, pour le système mécanique.



(a) Système mécanique.



(b) Caractéristique du ressort.

Figure 1

Exercice 2 : (06,00 points)

On désire concevoir une commande adaptative *indirecte* basée sur une correction du type PI de la forme

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right)$$

pour le système dynamique suivant :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\, e^{-\tau}}{T\, s + 1}$$

Les paramètres K_c et T_i représentent respectivement le gain et la constante de temps intégrale du correcteur PI. Les paramètres *variables dans le temps* K, T et τ représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard du système. Les variables $Y(s)$, $U(s)$ et $E(s)$ sont respectivement la sortie, la commande et l'erreur de poursuite définie comme suit $E(s) = Y^d(s) - Y(s)$ avec $Y^d(s)$ est la consigne désirée.

Les paramètres du correcteur PI sont calculés en utilisant la méthode de **Cohen-Coon** comme suit :

$$K_c = \frac{T}{K\,\tau}\left(\frac{10,8\,T + \tau}{12\,T}\right), \quad T_i = \frac{9\,T + 20\,\tau}{\tau\,(30\,T + 3\,\tau)}$$

Pour déterminer l'équivalent discret $C_d(z)$ du correcteur continu $C(s)$, on utilise l'approximation suivante :

$$s = \frac{z-1}{T_e}$$

où T_e est la période d'échantillonnage.

1. Quelle type d'*approximation* utilisée pour l'opérateur dérivée s,
2. Donner la fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$ et déduire l'expression de $u(k)$,
3. Pour $k < 0$, on a $y(k) = u(k) = 0$ et la consigne désirée est définie comme suit :

$$y^d(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

   Les estimés des paramètres du système à $k = 0$ sont $\hat{K}_0 = 2$, $\hat{T}_0 = 1$ et $\hat{\tau}_0 = 1,2$. La période d'échantillonnage $T_e = 1$. Déterminer la valeur de la commande $u(0)$.

Exercice 3 : (05,00 points)

Soit le système décrit par l'équation différentielle non linéaire :

$$M\,\ddot{x}(t) + K\,x(t)\,|\dot{x}(t)| = f(t)$$

Elle correspond au mouvement de la masse M soumise à une force $f(t)$ et se déplaçant dans un fluide visqueux avec un frottement proportionnel au crée de la vitesse. K est un paramètre positif.

On considère la quantité $u(t) = f(t)/M$ comme la grandeur de *commande* qui sera limitée en module par $|u(t)| \leq u_{\max}$.

Partant de l'état initial $\dot{x}(0) = x(0) = 0$ on désire en un temps *donné* t_f, atteindre l'état final tel que $\dot{x}(t_f)$ et $x(t_f)$ soit le *plus grand possible.*

1. Écrire le modèle sous forme d'état,
2. Préciser les conditions *terminales*,
3. Donner les *contraintes* à respecter et préciser leurs types,
4. Donner le *critère* à optimiser,
5. Résumer et préciser le type du problème de commande optimale,
6. En ignorant la contrainte sur la commande, donner les conditions d'optimalité en utilisant le *calcul des variations.*

Fin de l'épreuve

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2018−2019

Spécialité : Master 2 Académique, Option : Automatique et Informatique Industrielle
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel

Solution

Questions de cours : (04,00 points)

1. Paramètre *incertain* : constant mais inconnu ; paramètre *variable dans le temps* : variable et inconnu
2. On peut formuler le problème de commande optimale en ajoutant la contrainte instantanée $x^d(t) - x(t) > 0$.

Exercice 1 : (05,00 points)

1. Modèle du système :
   - Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2(t)$
   - Énergie potentielle : $V = \frac{1}{2}\,K\,x^2(t)$
   - Équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}(t)}\right) - \frac{\partial T}{\partial x(t)} + \frac{\partial V}{\partial x(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}(t)} = \sum_i f_i$$

$$\frac{d(M\,\dot{x}(t))}{dt} - 0 + K\,x(t) + 0 = f(t)$$

$$M\,\ddot{x}(t) + K\,x(t) = f(t)$$

2. Fonction de transfert $G(s)$:

$$M\,\ddot{x}(t) + K\,x(t) = f(t) \rightarrow (M\,s^2 + K)\,X(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + K}$$

3. Types des paramètres : masse M paramètre contant, raideur K paramètres variable dans le temps.
4. Modèle nominal : à partir de la Figure **1b**, on a $2 \leq K \leq 4$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3}$$

Exercice 2 : (06,00 points)

1. Approximation utilisée : différence avant.
2. Fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$:

$$C_d(z) = C(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T_e}} = K_c\,\left(1 + \frac{T_e}{T_i\,(z-1)}\right)$$

Expression de $u(k)$:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_c\,\left(1 + \frac{T_e}{T_i\,(z-1)}\right) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c\,T_i\,z + K_c\,(T_e - T_i)}{T_i\,(z-1)}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c\, z + K_c\left(\dfrac{T_e}{T_i} - 1\right)}{(z-1)} \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c + K_c\left(\dfrac{T_e}{T_i} - 1\right) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$u(k) = u(k-1) + K_c\, e(k) + K_c\left(\frac{T_e}{T_i} - 1\right) e(k-1)$$

3. Valeur de $u(0)$:

$$u(0) = u(-1) + K_{c_0}\, e(0) + K_{c_0}\left(\frac{T_e}{T_{i_0}} - 1\right) e(-1)$$

On a $u(-1) = 0$, $e(0) = y^d(0) - y(0) = 1 - 0 = 1$ et $e(-1) = y^d(-1) - y(-1) = 0 - 0 = 0$.

Gain du correcteur à $k = 0$:

$$K_{c_0} = \frac{\hat{T}_0}{\hat{K}_0\, \hat{\tau}_0}\left(\frac{10,8\, \hat{T}_0 + \hat{\tau}_0}{12\, \hat{T}_0}\right) \Rightarrow K_{c_0} = \frac{1}{2 \times 1.2}\left(\frac{10,8 \times 1 + 1.2}{12 \times 1}\right) \Rightarrow K_{c_0} = \frac{1}{2.4}$$

$$u(0) = 0 + \frac{1}{2.4} \times 1 + 0 = \frac{1}{2.4}$$

Exercice 3 : (05,00 points)

1. Le modèle sous forme d'état :

$$\ddot{x}(t) + \frac{K}{M}\, x(t)\, |\dot{x}(t)| = \frac{f(t)}{M} \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{K}{M}\, x(t)\, |\dot{x}(t)| = u(t)$$

En introduisant le changement de variable : $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = \dot{x}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M}\, x_1(t)\, |x_2(t)| + u(t) \end{aligned}$$

2. Conditions terminales :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \end{bmatrix} \text{ est libre}$$

3. Contraintes à respecter :

$$|u(t)| \le u_{\max} \rightarrow \text{ Contrainte instantanée}$$

4. Critère à maximiser :

$$J(u(t)) = x_1(t_f)$$

5. Problème de commande optimale :

$$\max J(u(t)) = x_1(t_f)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}\, x_1(t)\, |x_2(t)| + u(t) \\ &\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &x_2(t_f) = 0 \\ &|u(t)| - u_{\max} \le 0 \end{aligned}$$

Type du problème de commande optimale : **Mayer**.

6. Conditions d'optimalité (Équation d'**Euler-Lagrange**) : Pour écrire les conditions d'optimalité, on doit convertir le problème de **Mayer** en un problème de **Lagrange** comme suit :

$$\max J(u(t)) = \int_0^{t_f} x_2(t)\,dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t)\\
&\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}\,x_1(t)\,|x_2(t)| + u(t)\\
&\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\\
&x_2(t_f) = 0
\end{aligned}$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il vient :

$$\max J(u(t)) = \int_0^{t_f} x_2(t) + \lambda_1(t)\left(\dot{x}_1(t) - x_2(t)\right) + \lambda_2\left(\dot{x}_2(t) + \frac{K}{M}\,x_1(t)\,|x_2(t)| - u(t)\right)dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\\
&x_2(t_f) = 0
\end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1(t)}\right) &= \frac{K}{M}\,|x_2(t)| - \frac{d}{dt}\left(\lambda_1(t)\right) = \frac{K}{M}\,|x_2(t)| - \dot{\lambda}_1(t) = 0\\
\frac{\partial g}{\partial x_2(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2(t)}\right) &= 1 - \lambda_1(t) + \frac{K}{M}\,x_1(t) - \frac{d}{dt}\left(\lambda_2(t)\right) = 1 - \lambda_1(t) + \frac{K}{M}\,x_1(t) - \dot{\lambda}_2(t) = 0\\
\frac{\partial g}{\partial \lambda_1(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}_1(t)}\right) &= \dot{x}_1(t) - x_2(t) - \frac{d}{dt}(0) = \dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0\\
\frac{\partial g}{\partial \lambda_2(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}_2(t)}\right) &= \dot{x}_2(t) + \frac{K}{M}\,x_1(t)\,|x_2(t)| - u(t) - \frac{d}{dt}(0) = \dot{x}_2(t) + \frac{K}{M}\,x_1(t)\,|x_2(t)| - u(t) = 0\\
\frac{\partial g}{\partial u(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{u}(t)}\right) &= -\lambda_2(t) - \frac{d}{dt}(0) = -\lambda_2(t) = 0
\end{aligned}$$

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Électrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2018–2019

Spécialité : Master 2 Académique, Options : Automatique et Systèmes
Module : ***Commande Avancée*****, Examen : Partiel, Date : Dimanche 20 Janvier 2019, Durée : 01h 45mn**

IL EST DEMANDE DE DÉTAILLER TOUS LES DÉVELOPPEMENTS

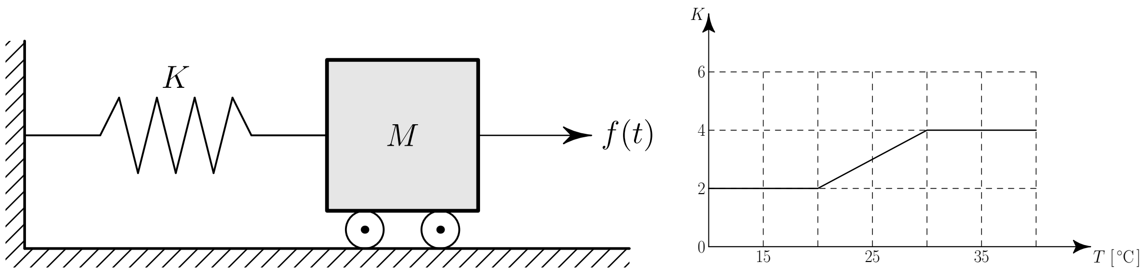
Questions de cours : (04,00 points)

1. Expliquer la différence entre un paramètre *incertain* et un paramètre *variable dans le temps*,
2. Peut-on formuler un problème de commande optimale avec un critère de la forme $J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))\, dt$ ($x^d(t)$ et $x(t)$ sont respectivement l'état désiré et l'état du système) ? Argumenter

Exercice 1 : (05,00 points)

Soit le système mécanique de la Figure **1a**. Le ressort de raideur K exerce une force de rappel lorsque la masse M est soumise à la force $f(t)$.

1. En utilisant le formalise de **Lagrange**, écrire l'*équation différentielle* régissant la dynamique de la masse M,
2. On suppose que les condition initiales sont nulles $\dot{x}(0) = x(0) = 0$. On considère comme sortie la position $x(t)$ de la masse M. Déduire à partir de l'équation différentielle obtenue en **1** la *fonction de transfert* du système $G(s)$,
3. Le ressort est sensible à la température T de l'environnement. La Figure **1b** donne l'évolution de la raideur K du ressort en fonction de la température T. On demande de préciser le *type* de chaque paramètre du système,
4. On donne $M = 1$. Proposer un modèle nominal, sous forme de fonction de transfert, pour le système mécanique.



(a) Système mécanique. (b) Caractéristique du ressort.

Figure 1

Exercice 2 : (06,00 points)

On désire concevoir une commande adaptative *indirecte* basée sur une correction du type PI de la forme

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right)$$

pour le système dynamique suivant :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\, e^{-\tau}}{T\, s + 1}$$

Les paramètres K_c et T_i représentent respectivement le gain et la constante de temps intégrale du correcteur PI. Les paramètres *variables dans le temps* K, T et τ représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard du système. Les variables $Y(s)$, $U(s)$ et $E(s)$ sont respectivement la sortie, la commande et l'erreur de poursuite définie comme suit $E(s) = Y^d(s) - Y(s)$ avec $Y^d(s)$ est la consigne désirée.

Les paramètres du correcteur PI sont calculés en utilisant la méthode de **Cohen-Coon** comme suit :

$$K_c = \frac{T}{K\,\tau}\left(\frac{10,8\,T+\tau}{12\,T}\right), \quad T_i = \frac{9\,T + 20\,\tau}{\tau\,(30\,T + 3\,\tau)}$$

Pour déterminer l'équivalent discret $C_d(z)$ du correcteur continu $C(s)$, on utilise l'approximation suivante :

$$s = \frac{z-1}{T_e}$$

où T_e est la période d'échantillonnage.

1. Quelle type d'*approximation* utilisée pour l'opérateur dérivée s,

2. Donner la fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$ et déduire l'expression de $u(k)$,

3. Pour $k < 0$, on a $y(k) = u(k) = 0$ et la consigne désirée est définie comme suit :

$$y^d(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Les estimés des paramètres du système à $k = 0$ sont $\hat{K}_0 = 2$, $\hat{T}_0 = 1$ et $\hat{\tau}_0 = 1,2$. La période d'échantillonnage $T_e = 1$. Déterminer la valeur de la commande $u(0)$.

Exercice 3 : (05,00 points)

On désire utiliser la commande prédictive pour corriger le système suivant

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$
$$y(k) = C\,x(k)$$

de telle sorte à minimiser le critère de performances définie comme suit :

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} y^2(k+j/k)$$

Pour réaliser cet objectif, on considère un *horizon de prédiction* $N_p = 4$ et un *horizon de commande* $N_u = 2$.

1. Montrer que les *prédictions* peuvent s'écrire sous la forme :

$$Y = G\,x(k) + F\,U \text{ avec } Y = \begin{bmatrix} y(k+1/k) & y(k+2/k) & y(k+3/k) & y(k+4/k) \end{bmatrix}^T \text{ et } U = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}$$

et préciser les expressions des matrices G et F.

2. Le critère à optimiser peut s'écrire sous la forme $J = Y^T\,Y$. Donner l'expression de la *séquence* de commande U en fonction de G, de F et de $x(k)$,

3. On partitionne la matrice $(F^T\,F)^{-1}\,F^T\,G$ comme suit :

$$(F^T\,F)^{-1}\,F^T\,G = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

4. Donner les dimensions de la matrice k_1,

5. Déduire l'expression de la commande $u(k)$.

Fin de l'épreuve

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2018−2019

Spécialité : Master 2 Académique, Option : Automatique et Systèmes
Module : ***Commande Avancée*****, Examen : Partiel**

Solution

Questions de cours : (04,00 points)

1. Paramètre *incertain* : constant mais inconnu ; paramètre *variable dans le temps* : variable et inconnu
2. On peut formuler le problème de commande optimale en ajoutant la contrainte instantanée $x^d(t) - x(t) > 0$.

Exercice 1 : (05,00 points)

1. Modèle du système :
   - Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t)$
   - Énergie potentielle : $V = \frac{1}{2} K x^2(t)$
   - Équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}(t)}\right) - \frac{\partial T}{\partial x(t)} + \frac{\partial V}{\partial x(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}(t)} = \sum_i f_i$$

$$\frac{d(M\,\dot{x}(t))}{dt} - 0 + K\,x(t) + 0 = f(t)$$

$$M\,\ddot{x}(t) + K\,x(t) = f(t)$$

2. Fonction de transfert $G(s)$:

$$M\,\ddot{x}(t) + K\,x(t) = f(t) \rightarrow (M\,s^2 + K)\,X(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + K}$$

3. Types des paramètres : masse M paramètre contant, raideur K paramètres variable dans le temps.
4. Modèle nominal : à partir de la Figure **1b**, on a $2 \le K \le 4$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3}$$

Exercice 2 : (06,00 points)

1. Approximation utilisée : différence avant.
2. Fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$:

$$C_d(z) = C(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T_e}} = K_c\left(1 + \frac{T_e}{T_i\,(z-1)}\right)$$

Expression de $u(k)$:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_c\left(1 + \frac{T_e}{T_i\,(z-1)}\right) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c\,T_i\,z + K_c\,(T_e - T_i)}{T_i\,(z-1)}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c\, z + K_c \left(\dfrac{T_e}{T_i} - 1\right)}{(z-1)} \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c + K_c \left(\dfrac{T_e}{T_i} - 1\right) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$u(k) = u(k-1) + K_c\, e(k) + K_c \left(\frac{T_e}{T_i} - 1\right) e(k-1)$$

3. Valeur de $u(0)$:

$$u(0) = u(-1) + K_{c_0}\, e(0) + K_{c_0} \left(\frac{T_e}{T_{i_0}} - 1\right) e(-1)$$

On a $u(-1) = 0$, $e(0) = y^d(0) - y(0) = 1 - 0 = 1$ et $e(-1) = y^d(-1) - y(-1) = 0 - 0 = 0$.

Gain du correcteur à $k = 0$:

$$K_{c_0} = \frac{\hat{T}_0}{\hat{K}_0\, \hat{\tau}_0} \left(\frac{10,8\, \hat{T}_0 + \hat{\tau}_0}{12\, \hat{T}_0}\right) \Rightarrow K_{c_0} = \frac{1}{2 \times 1.2} \left(\frac{10,8 \times 1 + 1.2}{12 \times 1}\right) \Rightarrow K_{c_0} = \frac{1}{2.4}$$

$$u(0) = 0 + \frac{1}{2.4} \times 1 + 0 = \frac{1}{2.4} = 0.4167$$

Exercice 3 : (05,00 points)

1. Calcul des prédictions :

$$y(k+1/k) = C\, x(k+1/k) = C\, A\, x(k) + C\, B\, u(k)$$

$$y(k+2/k) = C\, x(k+2/k) = C\, A\, x(k+1/k) + C\, B\, u(k+1) = C\, A^2\, x(k) + C\, A\, B\, u(k) + C\, B\, u(k+1)$$

$$\begin{aligned} y(k+3/k) &= C\, x(k+3/k) = C\, A\, x(k+2/k) + C\, B\, u(k+2) = C\, A\, x(k+2/k) + C\, B\, u(k+1) \\ &= C\, A^3\, x(k) + C\, A^2\, B\, u(k) + C\, A\, B\, u(k+1) + C\, B\, u(k+1) \\ &= C\, A^3\, x(k) + C\, A^2\, B\, u(k) + (C\, A\, B + C\, B)\, u(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k+4/k) &= C\, x(k+4/k) = C\, A\, x(k+3/k) + C\, B\, u(k+3) = C\, A\, x(k+3/k) + C\, B\, u(k+1) \\ &= C\, A^4\, x(k) + C\, A^3\, B\, u(k) + C\, A^2\, B\, u(k+1) + C\, A\, B\, u(k+1) + C\, B\, u(k+1) \\ &= C\, A^4\, x(k) + C\, A^3\, B\, u(k) + (C\, A^2\, B + C\, A\, B + C\, B)\, u(k+1) \end{aligned}$$

Les prédictions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} y(k+1/k) \\ y(k+2/k) \\ y(k+3/k) \\ y(k+4/k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\, A \\ C\, A^2 \\ C\, A^3 \\ C\, A^4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} C\, A & 0 \\ C\, A\, B & C\, B \\ C\, A^2\, B & C\, A\, B + C\, B \\ C\, A^3\, B & C\, A^2\, B + C\, A\, B + C\, B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}$$

2. Expression de la séquence de commande :

$$\begin{aligned} J(u) &= (G\, x(k) + F\, U)^T (G\, x(k) + F\, U) \\ &= (x^T(k)\, G^T + U^T\, F^T)\, (G\, x(k) + F\, U) \\ &= x^T(k)\, G^T\, G\, x(k) + x^T(k)\, G^T\, F\, U + U^T\, F^T\, G\, x(k) + U^T\, F^T\, F\, U \\ &= x^T(k)\, G^T\, G\, x(k) + x^T(k)\, G^T\, F\, U + U^T\, F^T\, G\, x(k) + U^T\, F^T\, F\, U \end{aligned}$$

$$\nabla_U J(u) = F^T G\, x(k) + F^T G\, x(k) + 2\, F^T F\, U = 0 \Rightarrow U = -\left(F^T F\right)^{-1} F^T G\, x(k)$$

3. Les dimensions de la matrice k_1 est : $1 \times n$ (n nombre d'états).

4. Expression de la commande $u(k)$:

$$u(k) = k_1\, x(k)$$

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Électrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2019−2020

Spécialité : Master 2 Académique, Options : AS & AII.
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel, Date : Dimanche 13 septembre 2020, Durée : 01h 30mn.

IL EST DEMANDÉ DE DÉTAILLER TOUS LES DÉVELOPPEMENTS

Exercice 1 : (04,00 points)

Le comportement dynamique d'un système est décrit par le modèle mathématique suivant :

$$\dot{x}_1(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = c\, x_1(t)$$

avec $a = 2$, $b = e^{-t}$ et $1 \leq c \leq 2$.

1. donner le *type* de chaque paramètre du système,
2. préciser la *classe* du système.

Exercice 2 : (04,00 points)

Le modèle mathématique d'un système à paramètres incertains est de la forme :

$$G(s) = \frac{e^{-\tau\, s}}{\alpha\, \beta\, s + \alpha + \beta}$$

avec $1 \leq \tau \leq 2$, $2 \leq \alpha \leq 4$ et $1 \leq \beta \leq 3$.

1. mettre le modèle sous la forme,

$$G(s) = \frac{e^{-[\tau_{\min}, \tau_{\max}]\, s}}{[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}]\, s + [a_{0_{\min}},\, a_{0_{\max}}]}$$

2. proposer un modèle nominal $G_n(s)$.

Exercice 3 : (06,00 points)

On désire concevoir une commande adaptative *indirecte* basée sur une correction du type PI de la forme :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right)$$

Pour déterminer l'équivalent discret $C_d(z)$ du correcteur continu $C(s)$, on propose d'approximer l'opérateur dérivée par la *différence finie centrée*

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{f(t + T_e) - f(t - T_e))}{2\, T_e}$$

où T_e est la période d'échantillonnage.

1. déterminer l'*approximation* de l'opérateur dérivée s en fonction de l'opérateur z,

2. donner la fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$ et déduire l'expression de $u(k)$,

3. à $k = 0$, les paramètres du correcteur PI sont $K_{c_0} = 2$ et $T_{i_0} = 1$, déterminer la valeur de la commande $u(0)$ si $y(k) = 0$ pour $k \leq 0$, $u(k) = 0$ pour $k < 0$, $T_e = 1$ et la consigne désirée est définie comme suit :

$$y^d(k) = \begin{cases} k+1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : (06,00 points)

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\left[u(t) + f(x(t))\right]$$
$$x(0) = x_0$$

où f est une non linéarité *incertaine* qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i\,\phi_i(x(t)) = \theta^T\,\phi(x(t))$$

où

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \quad \phi(x(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1(x(t)) \\ \phi_2(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_p(x(t)) \end{bmatrix}$$

Les paramètres θ_i $(i = 1, \ldots, p)$ sont constants mais *inconnus*. Les fonctions de base $\phi_i(x(t))$ $(i = 1, \ldots, p)$ sont bornées et *connues*. Les paramètres du système a et b sont *inconnus* et le *signe* du paramètre b est *connu*.

On considère le modèle de *référence* suivant :

$$\dot{x}_m(t) = a_m\,x_m(t) + b_m\,r(t), \quad a_m < 0$$

où $r(t)$ est le signal de commande de référence supposé borné.

1. donner l'expression de la commande $u(t)$ qui permet d'imposer en boucle fermée le comportement dynamique du modèle de référence,

2. en utilisant la méthode *directe* de **Lyapunov**, déterminer les *lois d'adaptation* des paramètres de la loi de commande $u(t)$.

Fin de l'épreuve

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Électrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2019−2020

Spécialité : Master 2 Académique, Option : AS & AII
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel

Solution

Exercice 1 : (04,00 points)

1. Type de chaque paramètre :

Paramètre	Valeur	Type
a	2	constant
b	e^{-t}	variable dans le temps
c	$\in [1,\, 2]$	Incertain

2. Classe du système : système à paramètres variants.

Exercice 2 : (04,00 points)

1. Système sous la forme :

$$G(s) = \frac{e^{-[\tau_{\min},\, \tau_{\max}]\, s}}{[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}]\, s + [a_{0_{\min}},\, a_{0_{\max}}]}$$

- Intervalle $[\tau_{\min},\, \tau_{\max}]$: $[\tau_{\min},\, \tau_{\max}] = [1,\, 2]$
- Intervalle : $[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}]$

$$\begin{aligned}[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}] &= \alpha \times \beta \\ &= [\alpha_{\min},\, \alpha_{\max}] \times [\beta_{\min},\, \beta_{\max}] \\ &= [\min\{E\},\, \max\{E\}]\end{aligned}$$

avec $E = \{\alpha_{\min} \times \beta_{\min},\, \alpha_{\min} \times \beta_{\max},\, \alpha_{\max} \times \beta_{\min},\, \alpha_{\max} \times \beta_{\max}\}$.

On a $E = \{2 \times 1,\, 2 \times 3,\, 4 \times 1,\, 4 \times 3\}$, alors

$$[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}] = [2,\, 12]$$

- Intervalle : $[a_{0_{\min}},\, a_{0_{\max}}] =$

$$\begin{aligned}[a_{0_{\min}},\, a_{1_{\max}}] &= \alpha + \beta \\ &= [\alpha_{\min},\, \alpha_{\max}] + [\beta_{\min},\, \beta_{\max}] \\ &= [\alpha_{\min} + \beta_{\min},\, \alpha_{\max} + \beta_{\max}] \\ &= [2+1,\, 4+3] \\ &= [3,\, 7]\end{aligned}$$

En résumé, la fonction de transfert sous la forme demandée est

$$G(s) = \frac{e^{-[1,\,2]}}{[2,\,12]\,s + [3,\,7]}$$

2. modèle nominal $G_n(s)$: la valeur de chaque paramètre du modèle nominal est calculée en prenant la moyenne de son domaine d'incertitude. Ainsi, le modèle nominal est :

$$G_n(s) = \frac{e^{-\left(\frac{1+2}{2}\right)s}}{\left(\frac{2+12}{2}\right)\,s + \frac{3+7}{2}}$$

$$\boxed{G_n(s) = \frac{e^{-1{,}5\,s}}{7\,s+5}}$$

Exercice 3 : (06,00 points)

1. Approximation de l'opérateur s en fonction de l'opérateur z :

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= \frac{f(t+T_e) - f(t-T_e)}{2\,T_e}\\
\frac{df(k\,T_e)}{dt} &= \frac{f(k\,T_e+T_e) - f(k\,T_e-T_e)}{2\,T_e}\\
s\,f(k\,T_e) &= \frac{f((k+1)\,T_e) - f((k-1)\,T_e)}{2\,T_e}\\
s\,f(k) &= \frac{f((k+1)) - f((k-1))}{2\,T_e} \quad (f((k-1)\,Te) \equiv f(k-1) \text{ et } f((k+1)\,Te) \equiv f(k+1))\\
s\,f(k) &= \frac{z\,f(k) - z^{-1}f(k)}{2\,T_e}\\
s\,f(k) &= \frac{z - z^{-1}}{2\,T_e} f(k) \Rightarrow s = \frac{z-z^{-1}}{2\,T_e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{s = \frac{z^2-1}{2\,T_e\,z}}$$

2. Fonction de transfert $C_d(z)$ et expression de la commande $u(k)$:

— Fonction de transfert du correcteur $C_d(z)$:

$$\begin{aligned}
C_d(z) &= C(s)\Big|_{s=\frac{z^2-1}{2\,T_e\,z}}\\
&= K_c\left(1 + \frac{1}{T_i\left(\frac{z^2-1}{2\,T_e\,z}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_d(z) = \frac{K_c\,T_i\,z^2 + 2\,K_c\,T_e\,z - K_c\,T_i}{T_i\,(z^2-1)}}$$

— Expression de la commande $u(k)$:

$$\begin{aligned}
G_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{K_c\,T_i\,z^2 + 2\,K_c\,T_e\,z - K_c\,T_i}{T_i\,(z^2-1)} \\
&= \frac{K_c\,z^2 + \dfrac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z - K_c}{z^2-1} \quad \text{(On a divisé l'expression précédente par } T_i\text{)} \\
&= \frac{K_c\,z^2 + \dfrac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z - K_c}{z^2-1} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \\
&= \frac{K_c + \dfrac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z^{-1} - K_c\,z^{-2}}{1-z^{-2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_c + \dfrac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z^{-1} - K_c\,z^{-2}}{1-z^{-2}} \Rightarrow \left(1-z^{-2}\right) U(z) = \left(K_c + \frac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z^{-1} - K_c\,z^{-2}\right) E(z)$$

$$U(z) - z^{-2}U(z) = K_c\,E(z) + \frac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z^{-1}\,E(z) - K_c\,z^{-2}\,E(z)$$

$$U(z) = z^{-2}\,U(z) + K_c\,E(z) + \frac{2\,K_c\,T_e}{T_i} z^{-1}\,E(z) - K_c\,z^{-2}\,E(z)$$

$$\boxed{u(k) = u(k-2) + K_{c_0}\,e(k) + \frac{2\,K_{c_0}\,T_e}{T_{i_0}}\,e(k-1) - K_{c_0}\,e(k-2)}$$

3. Calcul de la valeur de $u(0)$: d'après l'expression de la commande $u(k)$ obtenue en **2**, on a pour $k = 0$:

$$u(0) = u(-2) + K_{c_0}\,e(0) + \frac{2\,K_{c_0}\,T_e}{T_{i_0}}\,e(-1) - K_{c_0}\,e(-2)$$

$$\begin{aligned}
u(-2) &= 0, \quad (u(k) = 0 \text{ pour } k \le 0) \\
e(0) &= y^d(0) - y(0) = 1 - 0 = 1 \quad (y^d(k) = k+1 \text{ pour } k \ge 0 \text{ et } y(0) = 0) \\
e(-1) &= y^d(-1) - y(-1) = 0 - 0 = 0 \quad (y^d(k) = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } y(k) = 0 \text{ pour } k < 0) \\
e(-2) &= y^d(-2) - y(-2) = 0 - 0 = 0 \quad (y^d(k) = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et } y(k) = 0 \text{ pour } k < 0)
\end{aligned}$$

$$u(0) = K_{c_0}\,e(0) = 2 \times 1 \Rightarrow \boxed{u(0) = 2}$$

Exercice 4 :

1. Loi de commande $u(t)$:

Le système et le modèle de référence sont d'ordre 1. En comparant le système et le modèle de référence, on remarque la présence dans la non linéarité $f(x(t))$ dans le modèle, par conséquent la commande doit assurer les performances désirées (imposé le modèle de référence en boucle fermée) en utilisant le terme $k_1\,x(t) + k_2\,r(t)$ et compenser le terme non linéaire $b\,f(x(t))$ en utilisant le terme $-f(x(t))$, alors :

$$
\begin{aligned}
u(t) &= k_1\, x(t) + k_2\, r(t) - f(x(t)) \\
&= k_1\, x(t) + k_2\, r(t) - \theta^T\, \phi(x(t))
\end{aligned}
$$

2. Détermination des lois d'adaptation :

- a, b et θ sont constants : dans ce cas, on détermine les paramètres constants de la commande k_1^*, k_2^* et θ^*. Dans ce cas, le système en boucle fermée est de la forme :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= a\, x(t) + b\, u(t) + b\, f(x(t)) \\
&= a\, x(t) + b\, \left[k_1^*\, x(t) + k_2^*\, r(t) - {\theta^*}^T\, \phi(x(t))\right] + b\, \theta^T\, \phi(x(t)) \\
&= (a + b\, k_1^*)\; x(t) + b\, k_2^*\, r(t) + b\, (\theta - \theta^*)^T\, \phi(x(t))
\end{aligned}
$$

Par identification avec le modèle de référence, il vient :

$$
\begin{aligned}
a + b\, k_1^* &= a_m \\
b\, k_2^* &= b_m \\
\theta - \theta^* &= 0
\end{aligned}
$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{b_m}{k_2^*} \\
a &= a_m - \frac{k_1^*}{k_2^*}\, b_m \\
\theta^* &= \theta
\end{aligned}
$$

- a, b et θ sont variables dans le temps : le système en boucle ouverte est :

$$
\dot{x}(t) = a(t)\, x(t) + b(t)\, u(t) + b(t)\, \theta^T(t)\, \phi(x(t))
$$

et la commande est

$$
u(t) = k_1(t)\, x(t) + k_2(t)\, r(t) - \theta_c^T(t)\, \phi(x(t))
$$

par conséquent, le système en boucle fermée est donné comme suit :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (a(t) + b(t)\, k_1(t))\; x(t) + b(t)\, k_2(t)\, r(t) + b(t)\, \left(\theta^T(t) - \theta_c^T(t)\right)\, \phi(x(t)) \\
&= (a(t) + b(t)\, k_1(t))\; x(t) + b(t)\, k_2(t)\, r(t) + b(t)\, \left(\theta(t) - \theta_c(t)\right)^T\, \phi(x(t))
\end{aligned}
$$

Déterminons l'équation de la dynamique de l'erreur de poursuite

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\dot{x}(t)-\dot{x}_m(t)}_{\dot{e}(t)} &= (a(t)+b(t)\,k_1(t))\ x(t)+b(t)\,k_2(t)\,r(t)+b(t)\ (\theta(t)-\theta_c(t))^T\ \phi(x(t)) \\
&\quad -a_m\,x_m(t)-b_m\,r(t) \\
&= \left(\underbrace{a_m-\frac{k_1^*}{k_2^*}\,b_m}_{a(t)=a}+b(t)\,k_1(t)\right)\,x(t)+b(t)\,k_2(t)\,r(t)+b(t)\ \left(\underbrace{\theta^*}_{\theta(t)=\theta^*}-\theta_c(t)\right)^T\ \phi(x(t)) \\
&\quad -a_m\,x_m(t)-b_m\,r(t) \\
&= a_m\ \underbrace{(x(t)-x_m(t))}_{e(t)}+b(t)\ \left(\underbrace{k_1(t)-k_1^*}_{\tilde{k}_1(t)}\right)\,x(t)+b(t)\left(\underbrace{k_2(t)-k_2^*}_{\tilde{k}_2(t)}\right)\,r(t) \\
&\quad +b(t)\ \left(\underbrace{\theta^*-\theta_c(t)}_{\tilde{\theta}(t)}\right)^T\ \phi(x(t))
\end{aligned}
$$

$$
\dot{e}(t)=a_m\,e(t)+b(t)\,\left(\tilde{k}_1(t)\,x(t)+\tilde{k}_2(t)\,r(t)+\tilde{\theta}^T(t)\,\phi(x(t))\right)
$$

On prend comme fonction de Lyapunov candidate la fonction quadratique suivante :

$$
V(e(t),\,\tilde{k}_1(t),\,\tilde{k}_2(t),\,\tilde{\theta}(t))=\frac{e^2(t)}{2}+|b(t)|\left(\frac{\tilde{k}_1^2(t)}{2}+\frac{\tilde{k}_2^2(t)}{2}+\frac{\tilde{\theta}^T(t)\,Q\,\theta(t)}{2}\right),\quad Q=Q^T>0
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(e(t),\,\tilde{k}_1(t),\,\tilde{k}_2(t),\,\tilde{\theta}(t))}{dt} &= e(t)\,\dot{e}(t)+\tilde{k}_1(t)\,\dot{\tilde{k}}_1(t)+\tilde{k}_2(t)\,\dot{\tilde{k}}_2(t)+\tilde{\theta}^T(t)\,Q\,\dot{\tilde{\theta}}(t) \\
&= e(t)\,\Big[a_m\,e(t)+b(t)\,\tilde{k}_1(t)\,x(t)+b(t)\,\tilde{k}_2(t)\,r(t)+b(t)\,\tilde{\theta}^T(t)\,\phi(x(t))\Big] \\
&\quad +|b(t)|\,\tilde{k}_1(t)\,\dot{\tilde{k}}_1(t)+|b(t)|\,\tilde{k}_2(t)\,\dot{\tilde{k}}_2(t)+|b(t)|\,\tilde{\theta}^T(t)\,Q\,\dot{\tilde{\theta}}(t) \\
&= a_m\,e^2(t)+\tilde{k}_1(t)\,\Big[b(t)\,e(t)\,x(t)+|b(t)|\,\dot{\tilde{k}}_1(t)\Big]+\tilde{k}_2(t)\,\Big[b(t)\,e(t)\,r(t)+|b(t)|\dot{\tilde{k}}_2(t)\Big] \\
&\quad +\tilde{\theta}^T(t)\,\Big[b(t)\,e(t)\,\phi(x(t))+|b(t)|Q\,\dot{\tilde{\theta}}(t)\Big]
\end{aligned}
$$

On a l'équivalence $|b(t)|=b(t)\,\mathrm{signe}(b(t))$, alors

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(e(t),\,\tilde{k}_1(t),\,\tilde{k}_2(t),\,\tilde{\theta}(t))}{dt} &= a_m\,e^2(t)+\tilde{k}_1(t)\,b(t)\ \Big[e(t)\,x(t)+\mathrm{signe}(b(t))\,\dot{\tilde{k}}_1(t)\Big] \\
&\quad +\tilde{k}_2(t)\,b(t)\ \Big[e(t)\,r(t)+\mathrm{signe}(b(t))\,\dot{\tilde{k}}_2(t)\Big] \\
&\quad +b(t)\ \tilde{\theta}^T(t)\,\Big[e(t)\,\phi(x(t))+\mathrm{signe}(b(t))\,Q\,\dot{\tilde{\theta}}(t)\Big]
\end{aligned}
$$

Pour avoir $\dot{V} \leq 0$, comme $a_m > 0$, on doit imposer

$$\begin{aligned}
e(t)\,x(t) + \text{signe}(b(t))\,\dot{\tilde{k}}_1(t) = 0 &\Rightarrow \dot{\tilde{k}}_1(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,x(t) \\
&\Rightarrow \boxed{\dot{k}_1(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,x(t)} \\
e(t)\,r(t) + \text{signe}(b(t))\dot{\tilde{k}}_2(t) = 0 &\Rightarrow \dot{\tilde{k}}_2(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,r(t) \\
&\Rightarrow \boxed{\dot{k}_2(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,r(t)} \\
e(t)\,\phi(x(t)) + \text{signe}(b(t))\,Q\,\dot{\tilde{\theta}}(t) = 0 &\Rightarrow \dot{\tilde{\theta}}(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,Q^{-1}\,\phi(x(t)) \\
&\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = -\text{signe}(b(t))\,e(t)\,Q^{-1}\,\phi(x(t))}
\end{aligned}$$

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Électrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2019−2020

Spécialité : Master 2 Académique, Options : AS & AII.
Module : *Commande Avancée*, Examen : Partiel, Date : Mercredi 02 décembre 2020, Durée : 01h 30mn.

IL EST DEMANDÉ DE DÉTAILLER TOUS LES DÉVELOPPEMENTS

Exercice 1 : (04,00 points)

L'application de la méthode de la fonction de **Lyapounov** pour la synthèse d'une commande adaptative *directe* pour le système

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

dont l'objectif est d'imposer en boucle fermée le comportement dynamique régi par le modèle de référence

$$G_m(s) = \frac{Y_m(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2}$$

conduit à la loi de commande suivante

$$u(t) = \hat{a}(t)\, y(t) + r(t)$$

avec

$$\hat{a}(t) = -\gamma\, e(t)\, y(t)$$

où γ est un gain.

Donner le schéma de simulation du système corrigé (en boucle fermée).

Exercice 2 : (04,00 points)

Soit le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = -e^{-x(t)}\, x(t)$$

1. mettre le système sous forme d'un système *linéaire* tout en précisant la matrice d'état,
2. étudier la *stabilité* du système non linéaire en utilisant le modèle linéaire.

Exercice 3 : (06,00 points)

Concevoir une *commande adaptative à modèle de référence* pour le système linéaire suivant :

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2\,s + 1}$$

qui assure en *boucle fermée* le comportement dynamique régi par le *modèle de référence* suivant :

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 2\,s + 3}$$

Exercice 4 : (<u>06,00 points</u>)

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\ddot{y}(t) + 2\,\xi\,\omega_n\,\dot{y}(t) + \omega_n^2 = a\,x(t) + b\left[u(t) + f(y(t),\,\dot{y}(t))\right]$$
$$x(0) = x_0$$

où f est une non linéarité *incertaine* qu'on peut écrire sous la forme

$$f(y(t),\,\dot{y}(t)) = \theta^T\,\phi(y(t),\,\dot{y}(t))$$

où

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \quad \phi(y(t),\,\dot{y}(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1(y(t),\,\dot{y}(t)) \\ \phi_2(y(t),\,\dot{y}(t)) \\ \vdots \\ \phi_p(y(t),\,\dot{y}(t)) \end{bmatrix}$$

Les paramètres θ_i ($i = 1, \ldots, p$) sont constants mais *inconnus*. Les fonctions de base $\phi_i(y(t),\,\dot{y}(t))$ ($i = 1, \ldots, p$) sont bornées et *connues*. Les paramètres du système a et b sont *inconnus* et le *signe* du paramètre b est *connu*.

On considère le modèle de *référence* suivant :

$$\dot{x}_m(t) = a_m\,x_m(t) + b_m\,r(t), \quad a_m < 0$$

où $r(t)$ est le signal de commande de référence supposé borné.

1. donner l'expression de la commande $u(t)$ qui permet d'imposer en boucle fermée le comportement dynamique du modèle de référence,

2. en utilisant la méthode *directe* de **Lyapunov**, déterminer les *lois d'adaptation* des paramètres de la loi de commande $u(t)$.

<u>Fin de l'épreuve</u>

Université Mouloud MAMMERI, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département Automatique, Année Universitaire : 2019−2020

Spécialité : Master 2 Académique, Option : AS et AII
Module : ***Commande Avancée*****, Examen : Rattrapage**

Solution

Exercice 1 : (04,00 points)

Schéma de simulation :

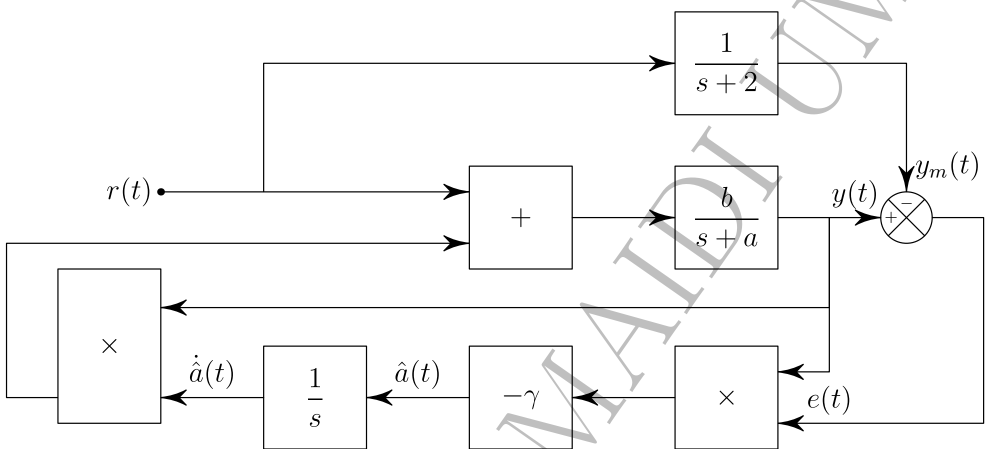


FIGURE 1 – Schéma de simulation

Exercice 2 : (04,00 points)

Le système non linéaire peut être mis sous la forme linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)$$

avec $A = -e^{-x(t)}$. Ce système admet une seule valeur propre qui est $\lambda = -e^{-x(t)}$. Comme $e^{-x(t)}$ est toujours positive, alors la partie réel de λ est négative donc le système non linéaire est stable.

Exercice 3 : (06,00 points)

On a $n = 2$ et $m = 1$. Le degré relative relatif du système est $\sigma = n - m = 1$.

Comme les paramètres du système sont constants, alors la loi de commande est de la forme :

$$U(s) = \theta_c^T\,W(s)$$

avec

$$\theta_c = \begin{bmatrix} \theta_{c_1} \\ \theta_{c_2} \\ \theta_{c_3} \\ \theta_{c_4} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(s)}{N_m(s)}\,U(s) \\ \frac{\alpha(s)}{N_m(s)}\,Y(s) \\ Y(s) \\ Y^d(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$\theta_{c_1} \in \Re^{n-1}, \quad \theta_{c_2} \in \Re^{n-1}, \quad \theta_{c_3} \in \Re, \quad \theta_{c_4} = \frac{k_m}{k} \in \Re, \quad \alpha(s) = \begin{bmatrix} s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a :

$$G(s) = k\,\frac{N(s)}{D(s)} = 1\,\frac{s+1}{s^2 - 2\,s + 1} \Rightarrow k = 1, \quad N(s) = s+1, \quad D(s) = s^2 - 2\,s + 1$$

$$G_m(s) = k_m\,\frac{N_m(s)}{D_m(s)} = 1\,\frac{s+3}{s^2 + 2\,s + 3} \Rightarrow k_m = 1, \quad N_m(s) = s+3, \quad D_m(s) = s^2 + 2\,s + 3$$

$$\theta_{c_1} \in \Re, \quad \theta_{c_2} \in \Re, \quad \theta_{c_3} \in \Re, \quad \theta_{c_4} = 1, \quad \alpha(s) = 1$$

Calcul des paramètres θ_{c_1}, θ_{c_2}, θ_{c_3} :

$$\frac{N(s)}{N_m(s)} = 1 - \frac{\theta_{c_1}\,\alpha(s)}{N_m(s)} \Rightarrow \frac{s+1}{s+3} = 1 - \frac{\theta_{c_1}}{s+3} \Rightarrow \frac{s+1}{s+3} = \frac{s+3-\theta_{c_1}}{s+3}$$

$$s + 3 - \theta_{c_1} = s + 1 \Rightarrow \theta_{c_1} = 2$$

$$\frac{D_m(s) - D(s)}{N_m(s)} = -\frac{\theta_{c_2}\,\alpha(s)}{N_m(s)} - \theta_{c_3} \Rightarrow \frac{s^2 + 2\,s + 3 - (s^2 - 2\,s + 1)}{s+3} = \frac{4\,s+2}{s+3}$$

$$\Rightarrow \frac{4\,s+2}{s+3} = -\frac{\theta_{c_2}}{s+3} - \theta_{c_3} \Rightarrow \frac{4\,s+2}{s+3} = \frac{-\theta_{c_3}\,s - \theta_{c_2} - 3\,\theta_{c_3}}{s+3}$$

$$-\theta_{c_3} = 4 \Rightarrow \theta_{c_3} = -4$$
$$-\theta_{c_2} - 3\,\theta_{c_3} = 2 \Rightarrow \theta_{c_2} = -2 - 3\,\theta_{c_3} \Rightarrow \theta_{c_2} = 10$$

En résumé, la loi de commande adaptative est :

$$U(s) = \theta_c^T\,W(s)$$

avec

$$\theta_c = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{U(s)}{s+3} \\ \dfrac{Y(s)}{s+3} \\ Y(s) \\ Y^d(s) \end{bmatrix}$$

Exercice 4 : (06,00 points)

(05,00 points)

On écrit le modèle sous la for d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + b\,\theta^T\,\theta(x)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\,\xi\,\omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

La forme de la loi de commande qui permet d'avoir le comportement du modèle de référence en boucle fermée est :

$$u = K_x\,x + k_r\,r - \theta^T\,\theta(x)$$

On définit les erreurs d'estimation paramétriques $\tilde{K}_x = K_x - K_x^*$, $\tilde{k}_r = k_r - k_r^*$ et $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$. Le système en boucle fermé est :

$$\dot{x} = \left(\underbrace{A + B\,K_x^*}_{A_m} + B\,\hat{K}_x\right)\,x + \left(\underbrace{B\,k_r^*}_{B_m} + B\,\tilde{k}_r\right)\,r - B\,\tilde{\theta}^T\phi(x)$$

L'erreur de poursuite en boucle fermée est

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = A_m\,e - B\,\tilde{K}_x\,x - B\,\tilde{k}_r\,r + B\,\tilde{\theta}^T\,\phi(x)$$

avec $e = x_m - x$.

On choisi comme fonction candidate de **Lyapunov** la fonction suivante :

$$V = e^T\,P\,e + |b|\,\left(\tilde{K}_x^T\Gamma_x^{-1}\,\tilde{K}_x + \gamma^{-1}\tilde{k}_r^2 + \tilde{\theta}^T\,\Gamma_\theta^{-1}\,\tilde{\theta}\right)$$

Par conséquent :

$$\dot{V} = \dot{e}^T\,P\,e + e^T\,P\,\dot{e} + |b|\,\left(2\,\tilde{K}_x^T\Gamma_x^{-1}\,\dot{\tilde{K}}_x + 2\,\gamma^{-1}\tilde{k}_r\,\dot{\tilde{k}}_r + 2\,\tilde{\theta}^T\,\Gamma_\theta^{-1}\,\tilde{\theta}\right)$$

Comme

$$A_m^T\,P + P\,A_m = -Q, \quad P = P^T, \quad Q = Q^T 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} =& (A_m\,e - B\,\tilde{K}_x\,x - B\,\tilde{k}_r\,r + B\,\tilde{\theta}^T\,\phi(x))^T\,P\,e \\
&+ e^T\,P\,\left(A_m\,e - B\,\tilde{K}_x\,x - B\,\tilde{k}_r\,r + B\,\tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right) \\
&+ |b|\,\left(2\tilde{K}_x^T\Gamma_x^{-1}\,\dot{\tilde{K}}_x + 2\,\gamma^{-1}\tilde{k}_r\,\dot{\tilde{k}}_r\gamma + 2\tilde{\theta}^T\,\Gamma_\theta^{-1}\,\tilde{\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} =& \left[(A_m\,e)^T + \left(B\,\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right)\right)^T\right]\,P\,e \\
&+ e^T\,P\,A_m\,e + e^T\,P\,B\,\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right) \\
&+ |b|\,\left(2\tilde{K}_x^T\Gamma_x^{-1}\,\dot{\tilde{K}}_x + 2\,\gamma^{-1}\tilde{k}_r\,\dot{\tilde{k}}_r\gamma + 2\tilde{\theta}^T\,\Gamma_\theta^{-1}\,\tilde{\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} =& e^T\,A_m^T\,P\,e + \left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right)^T\,B^T\,P\,e \\
&+ e^T\,P\,A_m\,e + e^T\,P\,B\,\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right) \\
&+ |b|\,\left(2\tilde{K}_x^T\Gamma_x^{-1}\,\dot{\tilde{K}}_x + 2\,\gamma^{-1}\tilde{k}_r\,\dot{\tilde{k}}_r\gamma + 2\tilde{\theta}^T\,\Gamma_\theta^{-1}\,\tilde{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Comme le produit $\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\phi(x)\right)^T\,B^T\,P\,e$ est un scalaire, alors

$$\begin{aligned}
\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right)^T\,B^T\,P\,e &= \left[\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right)^T\,B^T\,P\,e\right]^T \\
&= e^T\,P\,B\,\left(-\tilde{K}_x\,x - \tilde{k}_r\,r + \tilde{\theta}^T\,\phi(x)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\dot{V} = &- e^T\, Q\, e \\ &+ 2\, e^T\, P\, B\, \left(-\tilde{K}_x\, x - \tilde{k}_r\, r + \tilde{\theta}^T\, \phi(x)\right) \\ &+ |b|\, \left(2\, \tilde{K}_x^T \Gamma_x^{-1}\, \dot{\tilde{K}}_x + 2\, \gamma^{-1} \tilde{k}_r\, \dot{\tilde{k}}_r \gamma + 2\, \tilde{\theta}^T\, \Gamma_\theta^{-1}\, \tilde{\theta}\right)\end{aligned}$$

En prenant en compte l'égalité $2\, e^T\, P\, B = 2\, e^T\, \bar{P}\, b$, il vient

$$\begin{aligned}\dot{V} = &- e^T\, Q\, e \\ &+ 2\, |b|\, \mathrm{signe}(b)\, \left(-\tilde{K}_x\, x - \tilde{k}_r\, r + \tilde{\theta}^T\, \phi(x)\right)\, e^T\, \bar{P} \\ &+ |b|\, \left(2\, \tilde{K}_x^T\, \Gamma_x^{-1}\, \dot{\tilde{K}}_x + 2\, \gamma^{-1} \tilde{k}_r\, \dot{\tilde{k}}_r + 2\, \tilde{\theta}^T\, \Gamma_\theta^{-1}\, \tilde{\theta}\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\dot{v} = &- e^T\, Q\, e \\ &+ 2\, |b|\, \tilde{K}_x^T\, \left(-x\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x\right) \\ &= 2\, |b|\, \tilde{k}_r\, \left(-r\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \gamma^{-1}\, \dot{\tilde{k}}_r\right) \\ &+ 2\, |b|\, \tilde{\theta}^T\, \left(\phi(x)^T\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}}\right)\end{aligned}$$

Pour avoir $\dot{V} \leq 0$, on impose :

$$\begin{aligned}-x\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x = 0 \quad &\Rightarrow \dot{\tilde{K}}_x = \Gamma_x\, x\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) \\ -r\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \gamma^{-1}\, \dot{\tilde{k}}_r = 0 \quad &\Rightarrow \dot{\tilde{k}}_r = \gamma^{-1}\, r\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) \\ \phi(x)^T\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) + \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = 0 \quad &\Rightarrow \dot{\tilde{\theta}}_r^T = -\Gamma_\theta\, \phi(x)\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b)\end{aligned}$$

d'où les lois d'adaptation suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{K}_x &= \Gamma_x\, x\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) \\ \tilde{k}_r &= \gamma^{-1}\, r\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b) \\ \tilde{\theta}_r &= -\Gamma_\theta\, \phi(x)\, e^T\, \bar{P}\, \mathrm{signe}(b)\end{aligned}$$