UMMTO, FGEI, Département Automatique, Année Universitaire : 2019−2020
Spécialité : Master 2 Académique, Options : AS et AII.
Module : Automatique Avancée, Travaux dirigés.

Exo 1. Le comportement dynamique d'un système est décrit par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a\,x_1(t) + b\,x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= c\,x_1(t)\end{aligned}$$

avec $a = 2$, $b = e^{-t}$ et $1 \leq c \leq 2$.

1. donner le *type* de chaque paramètre du système,

2. préciser la *classe* du système.

Exo 2. Le comportement dynamique d'un système physique non linéaire est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = -x^3(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0 \tag{1}$$

1. donner le type du système du point de vue paramètres,

2. montrer qu'on peut le mettre sous forme d'un système linéaire à paramètres variants,

3. tirer une conclusion sur la stabilité du système en se basant sur le modèle obtenu en **2**.

Exo 3. Le modèle mathématique d'un système à paramètres incertains est de la forme :

$$G(s) = \frac{e^{-\tau\, s}}{\alpha\,\beta\, s + \alpha + \beta}$$

avec $1 \leq \tau \leq 2$, $2 \leq \alpha \leq 4$ et $1 \leq \beta \leq 3$.

1. mettre le modèle sous la forme,

$$G(s) = \frac{e^{-[\tau_{\min}, \tau_{\max}]\, s}}{[a_{1_{\min}},\, a_{1_{\max}}]\, s + [a_{0_{\min}},\, a_{0_{\max}}]}$$

2. proposer un modèle nominal $G_n(s)$.

Exo 4. Soit le système dynamique à paramètres a et b variables dans le temps

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+b}, \quad a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \tag{2}$$

on désire concevoir une commande adaptative *indirecte* pour commander le système. La stratégie de commande est basée sur une correction du type PI discret dont le réglage est réalisé par placement de pôles. La période d'échantillonnage $T_e = 1$ et la sortie désirée $y^d(t) = 1$. La fonction de transfert du correcteur PI continu est

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_c\left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right), \quad T_i \neq 0 \tag{3}$$

où $E(s) = Y^d(s) - Y(s)$ (erreur de poursuite).

1. en utilisant la différence arrière (méthode d'**Euler**), déterminer l'équivalent discret $C_d(z)$ du correcteur continu $C(s)$,

2. déterminer la fonction de transfert discrète $H_{\text{bo}}(z)$ du système à commander muni d'un bloqueur d'ordre 0,

3. calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée $H_{\text{bf}}(z)$,

4. on désire imposer, en boucle fermée, les pôles $z_1 = 0,25 + 0,25\,j$ et $z_2 = 0,25 - 0,25\,j$, donner les expressions des paramètres du correcteur θ_c en fonction des paramètres du modèle θ (la relation $\theta_c = F(\theta)$),

5. pour estimer les paramètres du modèle, on utilise la méthode des moindres carrés récursifs, donner l'algorithme de cette méthode d'estimation paramétrique en ligne,

6. donner l'équation de récurrence régissant la dynamique du système en boucle ouverte $H_{\text{bo}}(z)$,

7. les mesures relevées sont résumées dans le Tableau **1**, déterminer l'estimé des paramètres du système $\hat{\theta}_0$ et les paramètres du correcteur $C_d(z)$ à $k = 0$,

k	-4	-3	-2	-1	0
$u\,(k)$	1	1	1	1	?
$y\,(k)$	0	0,75	1,25	1,50	1,70

Table 1 – Mesures entrée-sortie.

8. calculer la commande $u(0)$, c'est-à-dire à appliquer au système à $k = 0$,

9. sachant que $y(1) = 2$, déduire l'estimé des paramètres du système $\hat{\theta}_1$ en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs,

10. donner les nouveaux paramètres du correcteur et la nouvelle commande $u(1)$.

Exo 5. Soit le système dynamique du second ordre, à deux paramètres a et b variables dans le temps, suivant :

$$\ddot{y}(t) = -a\,\dot{y}(t) - b\,y(t) + u(t) \tag{4}$$

où $y(t)$ et $u(t)$ sont respectivement la sortie et la commande du système.

On désire concevoir une commande adaptative *directe*, à base d'un retour d'état, pour imposer à la sortie $y(t)$ une trajectoire $y_m(t)$ définie par le modèle de référence suivant :

$$\ddot{y}_m(t) = -2\,\dot{y}_m(t) - y_m(t) + r(t) \tag{5}$$

où $y_m(t)$ et $r(t)$ sont respectivement la sortie de référence et la consigne désirée.

Pour concevoir la stratégie de commande adaptative *directe*, on propose d'utiliser les deux méthodes suivantes :

- méthode de la fonction de **Lyapounov**,
- méthode du *gradient* (règle **MIT**).

1. donner l'expression de la loi de commande $u(t)$,

2. on suppose que les paramètres a et b sont constants, déterminer les estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des paramètres a et b en fonction des paramètres θ_m du modèle de référence et les paramètres θ_c de la loi de commande $u(t)$.

I) Application de la méthode de la fonction de Lyapounov

1. donner le modèle du système en boucle fermée lorsque les paramètres a et b sont variables dans le temps,

2. déduire l'équation différentielle caractérisant la dynamique de l'erreur de poursuite :

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \tag{6}$$

en fonction de l'erreur de poursuite $e(t)$ de sa dérivée $\dot{e}(t)$ et $\tilde{\theta}_c(t)$,

3. proposer une fonction de **Lyapounov** $V(e(t), \dot{e}(t)\, \tilde{\theta}_c(t))$ permettant de déterminer les adaptations des paramètres de la loi de commande $\theta_c(t)$,

4. déduire les adaptions qui garantissent la convergence des différentes erreurs (stabilité en boucle fermée),

5. donner le schéma de simulation de la stratégie de commande.

II) Application de la méthode du gradient (règle MIT)

1. déterminer le vecteur des fonctions de sensibilité

$$\nabla_{\theta_c} y(t) \tag{7}$$

2. déduire les filtres de sensibilité,

3. écrire les équations des adaptions des paramètres θ_c du correcteur,

4. donner le schéma de simulation de la stratégie de commande.

Exo 6. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\, x(t) + b \Big[u(t) + f(x(t)) \Big] \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

où f est une non linéarité *incertaine* qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i\, \phi_i(x(t)) = \theta^T\, \phi(x(t))$$

où

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \quad \phi(x(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1(x(t)) \\ \phi_2(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_p(x(t)) \end{bmatrix}$$

Les paramètres θ_i ($i = 1, \ldots, p$) sont constants mais *inconnus*. Les fonctions de base $\phi_i(x(t))$ ($i = 1, \ldots, p$) sont bornées et *connues*. Les paramètres du système a et b sont *inconnus* et le *signe* du paramètre b est *connu*.

On considère le modèle de *référence* suivant :

$$\dot{x}_m(t) = a_m\, x_m(t) + b_m\, r(t), \quad a_m < 0$$

où $r(t)$ est le signal de commande de référence supposé borné.

1. donner l'expression de la commande $u(t)$ qui permet d'imposer en boucle fermée le comportement dynamique du modèle de référence,

2. en utilisant la méthode *directe* de **Lyapunov**, déterminer les *lois d'adaptation* des paramètres de la loi de commande $u(t)$.

Exo 7. On désire concevoir une commande à modèle de référence pour le système dynamique suivant :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2\,s + 4}{s^2 + s - 6} \tag{8}$$

pour assurer en boucle fermée le comportement dynamique de la fonction de transfert suivante :

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{y^d(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2\,s + 2} \tag{9}$$

1. donner le degré relatif du système $G(s)$,

2. donner l'expression générale de la commande $u(s)$ en précisant le vecteur des paramètres du correcteur θ_c,

3. déterminer les paramètres du correcteur θ_c,

4. en supposant que le gain du système est positif, donner les lois d'adaptation des paramètres du correcteur θ_c lorsque les paramètres θ du système $G(s)$ sont variables dans le temps,

5. donner le schéma de simulation de la commande à modèle de référence adaptative.

Partie II : Commande prédictive

Exo 1. Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\,x(t) + u(t) \tag{10}$$

$$x(0) = x_0 \tag{11}$$

La commande $u(t)$ est soumise à la contrainte suivante :

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} \tag{12}$$

L'objectif consiste à concevoir la commande $u(t)$ qui permet d'assurer la trajectoire désirée $x^d(t)$ et une réponse apériodique (sans dépassement).

1. formuler mathématiquement le problème de commande optimale à résoudre,

2. mettre le problème de commande optimale sous forme d'un problème d'optimisation statique (les variables de décision sont constantes),

3. classer le problème d'optimisation statique obtenu en **2** et proposer la méthode de résolution appropriée.

Exo 2. Le comportement dynamique d'un système est décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0,5\,z^{-1}}$$

1. montrer que l'évolution de la sortie $y(k)$ du système est décrite par une *équation aux différences* de la forme

$$y(k) = 0,5\,y(k-1) + u(k-1)$$

2. sachant que $y(0) = 0$, calculer les *quatre premières valeurs* de la réponse $y(k)$ (pour k allant de 1 à 4) pour une entrée du type *échelon unité*

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

3. donner la *matrice dynamique* pour un horizon de *prédiction* $N_p = 4$ et un horizon de *commande* $N_u = 3$.

Exo 3. Soit le système discret suivant :

$$G(z^{-1}) = \frac{0,632\,z^{-1}}{1 - 0,368\,z^{-1}} \tag{13}$$

1. donner l'expression de la sortie $y(k)$ pour une entrée $u(k)$ du type échelon unité,

2. donner la matrice dynamique pour un horizon de prédiction $N_p = 3$ et un horizon de commande $N_c = 2$,

3. calculer les deux premières commandes à appliquer au système dans le cas d'une poursuite de consigne du type échelon unité avec un minimum d'effort (l'erreur de poursuite et l'effort ne sont pas pénalisés).

Exo 4. On désire concevoir une commande prédictive généralisée (GPC) pour le système dynamique suivant :

$$\left(1 - 0,8\,z^{-1}\right)\,y_m(t) = \left(0,4 + 0,6\,z^{-1}\right)\,u(t-1)$$

Donner l'expression de la commande $u(t)$ pour le cas d'un horizon de commande $N_p = 3$ et d'un horizon de commande $N_u = 0$. Les matrices de pondérations sont :

$$Q = I_{3\times3} \text{ et } R = 0,8\,I_{3\times3}$$

Partie III : Commande optimale

Exo 1. Soit les deux problèmes de commande optimale suivants

Problème 1 : Soit le système mécanique de la Figure 1. Initialement (à $t = 0$), les longueurs des ressorts k_1 et k_2 sont respectivement l et $l/2$. Les trois masses ont la même largeur a. On désire déterminer la force f à appliquer, pour déplacer les trois masses, tout en maintenant une distance minimale entre les deux masses m_1 et m_2. Le transfert doit se faire en minimisant l'énergie mise en œuvre. Pour garantir un bon fonctionnement, la distance entre les deux masses m_2 et m_3 doit être supérieure à $l/2$.

FIGURE 1 – Système mécanique.

Problème 2 : Pour le circuit électrique de la Figure 2, on désire déterminer la commande optimale $I^*(t)$ permettant de transférer le système d'un état initial à un état final, à l'instant $t_f = 5\,\mathrm{s}$, caractérisé par une tension aux bornes de la capacité C de 1 V et un courant de 0 A dans l'inductance L tout en minimisant l'énergie mise en ouvre. Initialement, on suppose que le condensateur est déchargé. A l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$, on ferme l'interrupteur T. Pour protéger les éléments du circuit, on doit éviter des courants $I(t)$ qui dépassent la valeur tolérée $1,5\,\mathrm{A}$.

FIGURE 2 – Circuit électrique.

1. Formuler **mathématiquement** ces deux problèmes de commande.
2. Pour chaque problème, on demande de préciser

— Le type du problème de commande optimale ;
— La nature de l'état final ;
— La nature de l'horizon de commande ;
— Le type des contraintes.

Exo 2. Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 \left[t\,u(t) + u^2(t)\right]\,dt$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$x(1) = 1$$

1. Mettre le problème de commande optimale sous forme d'un problème de calcul des variations,

2. Donner l'équation d'**Euler-Lagrange** associée au problème et les conditions aux limites,

3. Déduire la loi de commande optimale $u^*(t)$.

4. Résoudre le problème en utilisant la méthode de **Lagrange**.

Exo 3. Donner les conditions d'optimalité correspondante au problème de *calcul des variations* formulé comme suit

$$J(x(t)) = \frac{1}{2}\int_0^2 [\ddot{x}(t)]^2\,dt$$

sujet à :

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$$
$$x(2) = 0, \quad \dot{x}(2) = 0$$

Exo 4. En utilisant la méthode du *principe du minimum*, déterminer la loi de commande optimale pour le problème formulé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = x(1) + \int_0^1 \left[x^2(t) + \frac{1}{4}\,u^2(t)\right]\,dt$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 0$$

Exo 5. Montrer, en utilisant le *principe du minimum*, que problème de commande optimale suivant

$$J(u(t)) = \int_0^1 \left[x^2(t) + u^2(t))\right]\,dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t)$$
$$x(0) = 1$$

admet comme solution

$$u^*(t) = -\frac{\sinh(1-t)}{\cosh(1)}$$

Indication :

- $\ddot{x}(t) - x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t)$;
- $\cosh(0) = 1$ et $\sinh(0) = 0$;
- $(\cosh(t))' = \sinh(t)$ et $(\sinh(t))' = \cosh(t)$;
- $\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)$.

Exo 6. Déterminer la commande optimale pour le système de second ordre suivant :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

qui minimise le critère

$$J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[x_1^2(t) + u^2(t)\right] dt$$

en utilisant l'équation de **Riccati**.

Exo 7. Soit le problème de commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[x^2(t) + u^2(t)\right] dt$$

sujet à :

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + u(t)$$

En utilisant l'équation de **Riccati**, exprimer la commande optimale en fonction des variables $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et t.

Exo 8. On désire résoudre, en utilisant l'équation fonctionnelle de **Bellman**, le problème suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[x(t) + u^2(t)\right] dt$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + 1$$
$$x(t_0) = 4$$
$$x(t_f) = 0$$
$$|u(t)| \leq 7$$

Déterminer numériquement la commande optimale $u^*(t)$ permettant de réaliser ce transfert en deux étapes. Pour le processus de discrétisation, on considère les quantums $\Delta x(t) = \Delta u(t) = 1$ pour les grandeurs $x(t)$ et $u(t)$. Pour la période d'échantillonnage, on prend $\Delta t = 1$.